

電磁場の量子化

目次

1. 光とは何かー電磁波と光子
2. 電磁気学のマックスウェル方程式
3. 電磁場中の荷電粒子の古典ハミルトニアン
4. 電磁場の方程式におけるゲージ変換とその不定性
5. ベクトル・ポテンシャルの平面波展開(フーリエ展開)
6. 電磁場の量子化
7. 量子化されたベクトルポテンシャル、ハミルトニアン、運動量

1. 光とは何かー電磁波と光子

電磁波：物理空間（真空）中を伝播する場合には波動的性質を示す。
直進、反射、屈折、干渉。トムソン散乱。

光子：物質粒子との相互作用（光子の吸収・消滅や散乱）の場合には粒子的性質を示す。

光電効果、コンプトン散乱。電子陽電子の対消滅・光子対発生。

光電効果は太陽電池の基礎原理になっている！

電子陽電子の対消滅・光子対発生はガン病巣などPET診断の基礎原理となっている！

PET=positron emission tomography

したがって、（広義の）光は単純な波動でも、単純な粒子でない！

2.1 電磁気学のマックスウェル方程式

マックスウェル方程式(真空中)の微分形

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \dots (1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0, \dots (2)$$

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \dots (3)$$

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{j}, \dots (4)$$

電場に対するガウスの法則

(電荷は電気力線の源)

磁場に対するガウスの法則

(磁力線は閉じている)

ファラデーの電磁誘導の法則

(磁束密度の時間変化率に比例し、
変化を妨げる向きに、誘導電場が発生)

アンペールマックスウェルの法則

$\mathbf{E}$ 電場(ベクトル)

ε_0 真空の誘電率

$\mathbf{B}$ 磁束密度(ベクトル)

μ_0 真空の透磁率

$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$, $\mathbf{H}$: 磁場ベクトル

ρ : 電荷密度 $\mathbf{j}$ 電流密度(ベクトル): 単位断面積あたりの電流の大きさ・向き

電磁波とそのエネルギーの流れ

マックスウェル方程式からの電場、磁場の波動方程式の導出

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \nabla^2 \mathbf{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \rightarrow \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} = c^2; c = \text{光速} !$$

光＝電磁波：物理空間（真空）は電磁波を伝える性質をもつこと

ポインティング・ベクトル (Poynting vector)

$\mathbf{S} \equiv \mathbf{E} \times \mathbf{H}$, 電磁波のエネルギー流れの密度

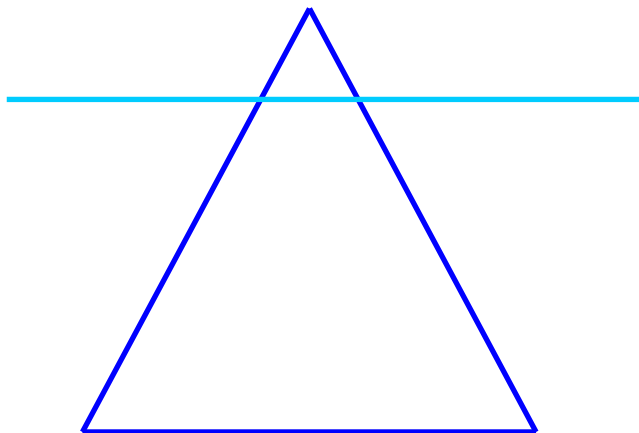
$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$$

スカラー・ポテンシャルとベクトル・ポテンシャルの導入

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdots (5) \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \cdots (6)$$

静電場 誘導電場

電場 E 、磁場 B よりもスカラー・ポテンシャル ϕ 、
ベクトル・ポテンシャル $\mathbf{A}$ がより基本的な物理量



氷山の一角としての電場、磁場

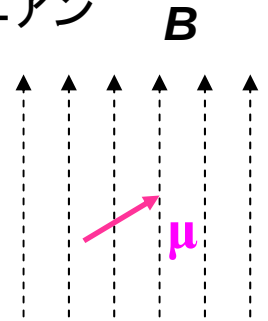
氷山全体としてのスカラー・ポテンシャル、
ベクトル・ポテンシャル

3. 電磁場中の荷電粒子の古典ハミルトニアン

電荷 q 、質量 m の磁気モーメント $\boldsymbol{\mu}$ をもつ荷電粒子の運動量 $\mathbf{p}$ 、
静電ポテンシャル ϕ 、ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ の中のハミルトニアン

$$H = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 + q\phi - \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}$$

$$= \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 + q\phi - \boldsymbol{\mu} \cdot (\nabla \times \mathbf{A})$$



$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

静電場 誘導電場

-----ハミルトン方程式

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

ローレンツ力

$$\frac{dp_x}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad \frac{dp_y}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y}, \quad \frac{dp_z}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial z};$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_x}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_y}, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_z}$$

自由電磁場のハミルトニアン(エネルギー)

$$\begin{aligned} H_0 &\equiv \frac{1}{8\pi} \iiint (\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2) d^3\mathbf{r} \\ &= \frac{1}{8\pi} \iiint \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \partial_j \mathbf{A} \cdot \partial_j \mathbf{A} \right) d^3\mathbf{r} \cdots (7) \\ \sum_{j=1}^3 \partial_j \mathbf{A} \cdot \partial_j \mathbf{A} &\equiv \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} \end{aligned}$$

4. 電磁場の方程式におけるゲージ変換とその不定性

ポテンシャルの従う方程式(一般)

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \cdots (1)$$

$$-\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial(\nabla \phi)}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{j}, \cdots (2) \text{ (真空: } \phi = 0, \mathbf{j} = 0 \text{)}$$

ゲージ変換と電磁場のゲージ不変性

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \nabla \chi(\mathbf{r}) : \cdots (3), \chi(\mathbf{r}) : \text{任意のスカラー関数}$$

式(1),(2)はゲージ変換(3)に対して形を変えない

クーロン・ゲージを採用すると

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0 \cdots (4)$$

$$\Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0 \cdots (5)$$

5. ベクトル・ポテンシャルの平面波展開(フーリエ展開)

ベクトル・ポテンシャルを3次元フーリエ展開する

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{q}(\mathbf{k}, t) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \cdots (1)$$

この展開式をベクトルポテンシャルが満たす式, 4の式(5)に代入すると

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathbf{q}(\mathbf{k}, t) = -c^2 \mathbf{k}^2 \mathbf{q}(\mathbf{k}, t) \cdots (2)$$

$$\rightarrow \mathbf{q}(\mathbf{k}, t) = \mathbf{q}(\mathbf{k}) \exp(-i\omega_k t), \omega_k \equiv ck \cdots (3)$$

角振動数 $\omega = ck$ の複素振動子

ベクトルポテンシャルが実数であることを考慮して、次式のように表す。

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} \left[\mathbf{q}(\mathbf{k}) \cdot \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega_k t) + \mathbf{q}^*(\mathbf{k}) \cdot \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + i\omega_k t) \right] \cdots (4)$$

ところが、この式(4)では4の式(4) (= 横波条件) を満たしていない！

ベクトル展開係数を波数ベクトルの方向とそれに垂直な2つの方向成分に分解する。

$$\begin{aligned}\mathbf{q}(\mathbf{k}) &= q^{(1)}(\mathbf{k})\mathbf{e}^{(1)}(\mathbf{k}) + q^{(2)}(\mathbf{k})\mathbf{e}^{(2)}(\mathbf{k}) + q^{(\ell)}(\mathbf{k})\mathbf{e}^{(\ell)}(\mathbf{k}) \quad (\ell=\text{longitudinal wave, 縦波}) \\ &= \sum_{p=1,2,\ell} q^{(p)}(\mathbf{k})\mathbf{e}^{(p)}(\mathbf{k}) \cdots (5),\end{aligned}$$

$$\mathbf{q}^*(\mathbf{k}) = \sum_{p=1,2,\ell} q^{(p)*}(\mathbf{k})\mathbf{e}^{(p)}(\mathbf{k}) \cdots (6),$$

式(5),(6)を(4)に代入して、4の式(4)より

$$\mathbf{A} \propto \sum_p q^{(p)} \mathbf{e}^{(p)} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$$

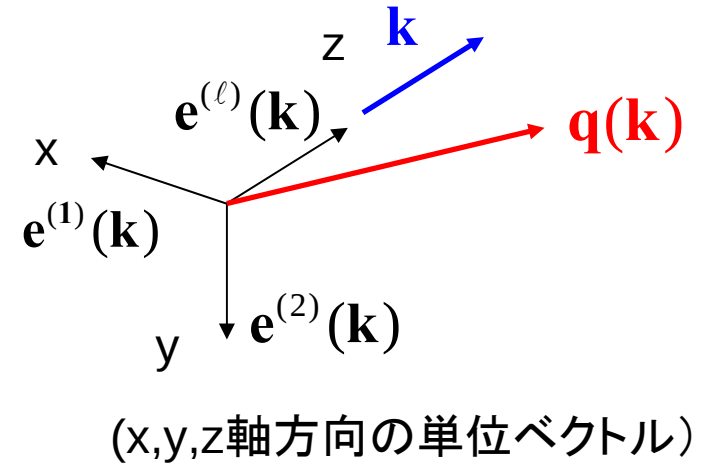
$$\rightarrow \nabla \cdot \mathbf{A} \propto \left[q^{(1)}ik_x + q^{(2)}ik_y + q^{(\ell)}ik_z \right] q^{(1)}ik_x \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$$

$$\rightarrow \mathbf{k} \cdot \mathbf{q}(\mathbf{k}) = kq^{(\ell)}(\mathbf{k}) = 0, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{q}^*(\mathbf{k}) = kq^{(\ell)*}(\mathbf{k}) = 0, \cdots (7)$$

4の式(4)は電磁波には縦波がないという条件を意味する！

結局、ベクトルポテンシャルは次式のように展開される。

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{p=1,2} \left[q^{(p)}(\mathbf{k}) \cdot \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega_k t) + q^{(p)*}(\mathbf{k}) \cdot \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + i\omega_k t) \right] \mathbf{e}^{(p)}(\mathbf{k}) \cdots (8)$$



6. 電磁場の量子化

量子化 $q^{(p)}(\mathbf{k}), q^{*(p)}(\mathbf{k}) \rightarrow \hat{q}^{(p)}(\mathbf{k}), \hat{q}^{\dagger(p)}(\mathbf{k})$

$$\left[\hat{q}^{(p)}(\mathbf{k}), \hat{q}^{\dagger(p')}(\mathbf{k}') \right] = \frac{4\hbar c^2}{2\omega_k} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \delta_{pp'},$$

$$\left[\hat{q}^{(p)}(\mathbf{k}), \hat{q}^{(p')}(\mathbf{k}') \right] = \left[\hat{q}^{\dagger(p)}(\mathbf{k}), \hat{q}^{\dagger(p')}(\mathbf{k}') \right] = 0 \cdots (9)$$

ボース粒子型生成・消滅演算子の導入

$$\hat{q}^{(p)}(\mathbf{k}) = \sqrt{\frac{4\hbar c^2}{2\omega_k}} \hat{b}_{\mathbf{k}}^{(p)}, \quad \hat{q}^{\dagger(p)}(\mathbf{k}) = \sqrt{\frac{4\hbar c^2}{2\omega_k}} \hat{b}_{\mathbf{k}}^{(p)\dagger} \cdots (10)$$

$$\rightarrow \left[\hat{b}_{\mathbf{k}}^{(p)}, \hat{b}_{\mathbf{k}}^{(p')\dagger} \right] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \delta_{pp'},$$

$$\left[\hat{b}_{\mathbf{k}}^{(p)}, \hat{b}_{\mathbf{k}}^{(p')} \right] = \left[\hat{b}_{\mathbf{k}}^{(p)\dagger}, \hat{b}_{\mathbf{k}}^{(p')\dagger} \right] = 0 \cdots (11)$$

7. 量子化されたベクトルポテンシャル、ハミルトニアン、運動量

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\frac{4\pi\hbar c^2}{V}} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{p=1,2} \frac{\mathbf{e}^{(p)}(\mathbf{k})}{\sqrt{2\omega_k}} \left\{ \hat{\mathbf{b}}_{\mathbf{k}}^{(p)} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega_k t) + \hat{\mathbf{b}}_{\mathbf{k}}^{(p)\dagger} \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + i\omega_k t) \right\} \cdots (12)$$

振幅は離散的な値のみが許される！

3の式(7)、古典電磁場ハミルトニアンに式(8)を代入すると

$$H_0 = \frac{1}{8\pi} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{p=1,2} \left(\frac{\omega_k^2}{c^2} + \mathbf{k}^2 \right) \left\{ q^{(p)}(\mathbf{k}) q^{(p)\dagger}(\mathbf{k}) + q^{(p)\dagger}(\mathbf{k}) q^{(p)}(\mathbf{k}) \right\} \cdots (13)$$

式(10)を代入する(量子化する)と

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{p=1,2} \hbar \omega_k \left(\hat{\mathbf{b}}_{\mathbf{k}}^{(p)\dagger} \hat{\mathbf{b}}_{\mathbf{k}}^{(p)} + \hat{\mathbf{b}}_{\mathbf{k}}^{(p)} \hat{\mathbf{b}}_{\mathbf{k}}^{(p)\dagger} \right) \quad \begin{array}{l} \text{古典電磁場の量子化による} \\ \text{光子(フォトン)の実現} \end{array}$$

$$= \sum_{\mathbf{k}} \sum_{p=1,2} \hbar \omega_k \left(\hat{\mathbf{b}}_{\mathbf{k}}^{(p)\dagger} \hat{\mathbf{b}}_{\mathbf{k}}^{(p)} + \frac{1}{2} \right) \cdots (14)$$

波数 $\mathbf{k}$ をもつ光子(フォトン)のエネルギー = $\hbar \omega_k$

ひとつの波数 $\mathbf{k}$ をもつ光子には $p=1,2$ の2種類: 偏光 (polarization) が2つあること

電磁場の運動量

$$\mathbf{G} \equiv \frac{1}{4\pi c} \iiint (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) d^3\mathbf{r} \cdots (15) : \text{Poyntingベクトルの積分}$$

量子化

$$\hat{\mathbf{G}} = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{p=1,2} \hbar \mathbf{k} \hat{b}_{\mathbf{k}}^{(p)\dagger} \hat{b}_{\mathbf{k}}^{(p)} \cdots (16)$$

波数 $\mathbf{k}$ をもつ光子は運動量 $\hbar \mathbf{k}$ をもつこと!!

参考文献

D. K. Ferry「デバイス物理のための量子力学」、丸善。1996年。9章。

小出昭一郎「量子力学(II)―改訂版―」、裳華房、1990年。11章。

高橋 康「物性研究者のための場の量子論 I」、培風館。1984年。1, 2章。