「物理概論」(上) 小出, 兵藤, 阿部, 1983

補遺 2. 解析力学の初歩

2.1 仮想仕事の原理とダランベールの原理

力の成分 $\mathbf{F}=(X,Y,Z)$

○ 慣性系中の質点 m → $\mathbf{r}$, $\mathbf{F}$; $m\ddot{\mathbf{r}}=\mathbf{F}$

$\mathbf{F}=0$: 平衡(つりあい)

$$X=Y=Z=0 \qquad (\quad .1)$$

◎ δ: operation の一種

$\delta\mathbf{r}=(\delta x,\delta y,\delta z)$ の仮想変位 (virtual displacement) = variation 変分 → 変分原理

$\mathbf{F}$ のする仕事 $=\delta W=\mathbf{F}\cdot\delta\mathbf{r}$

$$=X\cdot\delta x+Y\cdot\delta y+Z\cdot\delta z=0 \qquad (\quad .2)$$

$\boxed{\text{仮想仕事の原理}}$ スカラー!

仮想仕事 ↑ ($\quad$.1)

for arbitrary $\delta\mathbf{r}$: if ($\quad$.2) → ($\quad$.1)

∴ ($\quad$.1) ≡ ($\quad$.2) mathematically equivalent

○ 質点系への拡張 : n 個

m_i, $\mathbf{F}_i(=(X_i,Y_i,Z_i))$, $\delta\mathbf{r}_i(=(\delta x_i,\delta y_i,\delta z_i))$

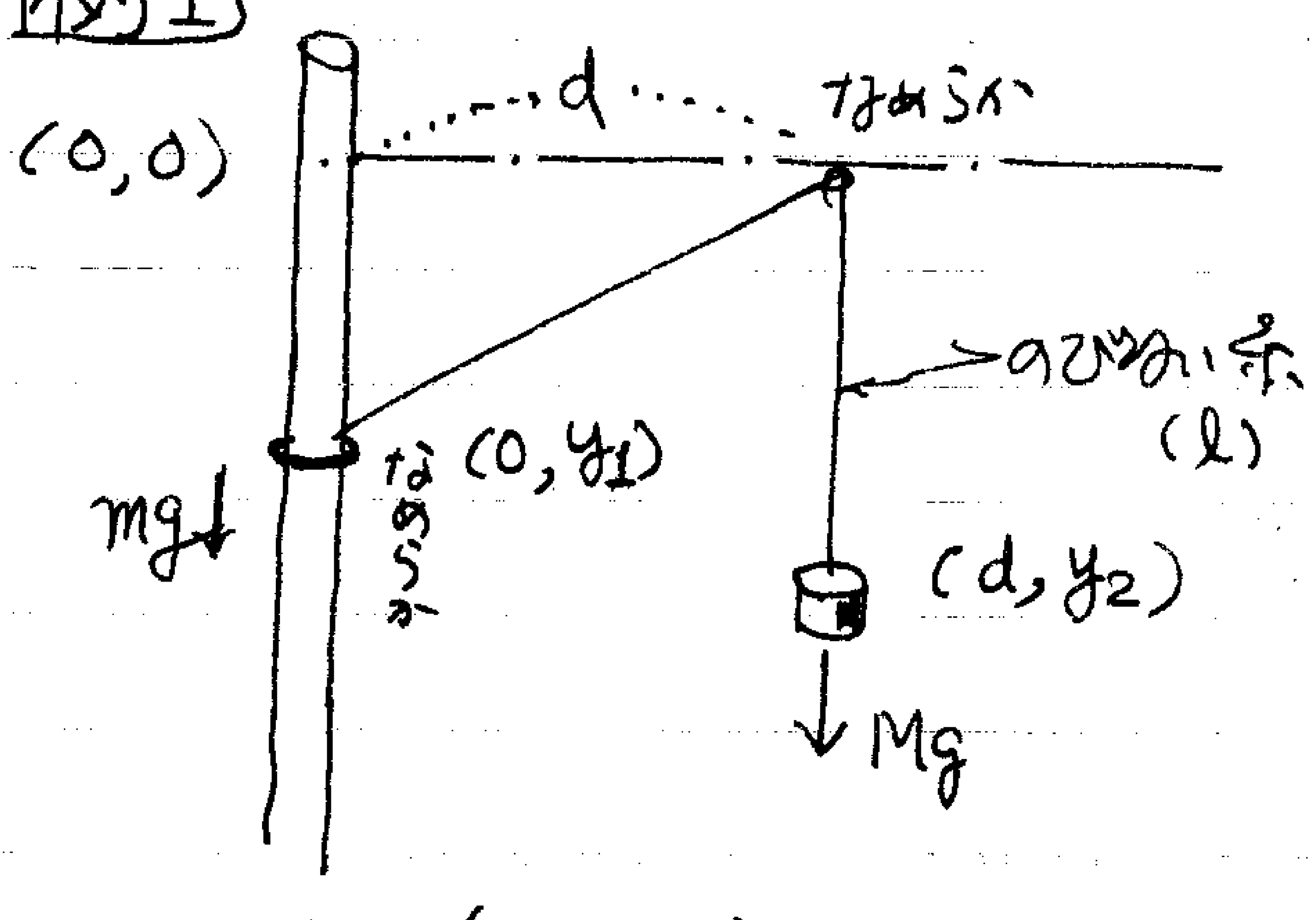
仮想仕事の原理: $$\sum_{i=1}^{n}(X_i\delta x_i+Y_i\delta y_i+Z_i\delta z_i)=0 \qquad (\quad .3)$$

☆ 束縛条件があるときの仮想変位

なめらかな束縛 → 束縛力は仕事をしない。

(X,Y,Z) : 束縛力以外の外力

$\boxed{\text{例1}}$



$(M>m)$

系に働く外力: mg & Mg.

仮想仕事の原理より(y_1, y_2 について)

$$mg\cdot\delta y_1+Mg\cdot\delta y_2=0 \qquad (1)$$

糸の長さ l:

$$\sqrt{y_1^2+d^2}+y_2=l$$

微分

$$\frac{y_1 \cdot \delta y_1}{\sqrt{y_1^2+d^2}} + \delta y_2 = 0 \qquad \text{(ii)}$$

→(i).

$$mg \cdot \delta y_1 - Mg \cdot \frac{y_1 \delta y_1}{\sqrt{y_1^2+d^2}} = 0$$

δy_1:任意 $\therefore\ y_1 = \dfrac{md}{\sqrt{M^2-m^2}}$ //

$$m\ddot{\mathbb{r}} = \mathbb{F} \rightarrow \boxed{\mathbb{F} + (-m\ddot{\mathbb{r}}) = 0} \qquad \text{(4)}$$

$(-m\ddot{\mathbb{r}}) \equiv \mathbb{F}'$ 慣性力 (慣性抵抗)

慣性抵抗を加えることにより運動している質点の問題をつりあいの問題に帰着できる。

ダランベールの原理!

質点系 $(i=1,2,\cdots,n)$ $\qquad \mathbb{F}_i + (-m_i\ddot{\mathbb{r}}_i) = 0 \qquad$ (5)

ある瞬間につき (i.e., t=一定)

$$\sum_i (\mathbb{F}_i - m_i\ddot{\mathbb{r}}_i)\cdot\delta\mathbb{r}_i = 0 \qquad (6)$$

$$\sum_i \{(X_i - m_i\ddot{x}_i)\delta x_i + (Y_i - m_i\ddot{y}_i)\delta y_i + \cdots\} = 0 \qquad (6')$$

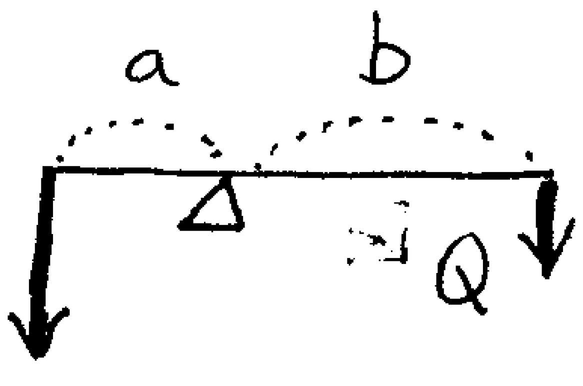
if $\overset{外力}{\mathbb{F}_i}$ = 保存力, $\quad U$: pot. Energy

$$X_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i} \quad \cdots\cdots$$

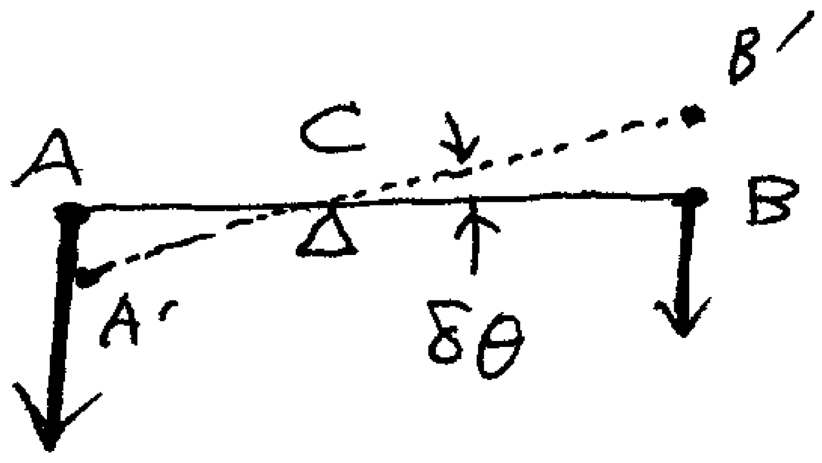
$$(A.2.6)' \Rightarrow \boxed{\sum_i m_i(\ddot{x}_i\,\delta x_i + \cdots) = -\,dU} \qquad (7)$$

[変分原理：制作1993.2.20]

左図のように、腕の長さa,bの挺子（てこ）の両端に鉛直下方に大きさP ,Qの力が働いているものとする。そのつりあいの条件を仮想仕事の原理を用いて求めよ。



（解答）



この場合，C点で支えられていることが束縛条件（拘束条件）である。これを破らないように AB両端がどれだけ動くかを考えてみる。

微小な角$\delta\theta$を だけ Cのまわりに回したとすれば（仮想変位）

Aは $a\cdot\delta\theta$だけ下方に移動し，Bは $b\cdot\delta\theta$だけ上方に移動する。したがって 力Pのする仕事（仮想仕事）は

$P\cdot a\,\delta\theta$ ―下向きを正符号として―，力Qのする仕事は

$(-)Q\cdot b\,\delta\theta$ である。それゆえ，全体の仮想仕事δWは

$$\delta W = P\cdot a\cdot\delta\theta + (-)Q\cdot b\,\delta\theta$$

となる。つりあいの条件は任意の$\delta\theta$（微小変位という範囲内で）に対して $\delta W = 0$ というのであるから求める条件は

$$P\cdot a = Q\cdot b$$

となる。