

y

ラグランジュ未定乗数(係数)法 - 条件付き第一変分問題 -

§ 2変数関数の第一変分

・ 2変数(独立変数) x, y の関数 $f(x, y)$ の極値条件: 変分 $\delta x, \delta y$ に対する停留条件

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y = 0$$

(1)

$\delta x, \delta y$: (微分ではあるが) 任意

$$\Rightarrow \text{通常の極値条件: } \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

・ 条件付き第一変分

$$(\text{拘束}) \text{条件: } g(x, y) = 0 \quad (3)$$

があるが, 変分 $\delta x, \delta y$ は (独立ではあり得ず) 条件

$$\delta g = \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right) \delta x + \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right) \delta y = 0 \quad (4)$$

を満たす必要がある。従って, 極値(第一変分)において (1) と (4) の両者を満たす必要がある。

(4)より

$$\delta y = \left(- \frac{\left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)}{\left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)} \right) \delta x \quad (5)$$

(5)を(1)に代入

$$0 = \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) - \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \times \frac{\left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)}{\left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)} \right] \delta x$$

$\therefore$

$$\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)}{\left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)} = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)}{\left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)} \quad \text{これが一定} \quad (= \lambda) \text{ とおくと} \quad (6)$$

$$\rightarrow \begin{cases} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) - \lambda \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right) = 0 \\ \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) - \lambda \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

(7)の結果: 修正された関数

$$F(x, y) \equiv f(x, y) - \lambda \cdot g(x, y) \quad (8)$$

において, x, y を独立変数と考えたときの極値条件(第一変分条件)

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) = 0, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right) = 0 \quad (9)$$

に相当している(等価である)。

2/

§ n 変数, m 個の条件 付の 停留条件 (第一変分問題)

変数 $x_1, x_2, \dots, x_n$ の間に $m (< n)$ 個の条件

$$g_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (j=1, 2, \dots, m (< n)) \quad \dots (10)$$

があれば, 関数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ の極値は 変数 $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ が 全2独立であると
考えたときの, 修正された関数

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv f(x_1, x_2, \dots, x_n) - \sum_{j=1}^m \lambda_j \cdot g_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (11)$$

の 極値条件

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0 \quad (12)$$

から求められる。これを ラグランジュの未定乗数(係数)法と云う。 (Lagrange's multiplier method)

λ_j : ラグランジュの未定乗数