

トンネル効果において、高さ V_0 , 幅 d のポテンシャル障壁にエネルギー $E(< V_0)$ の電子が入射する場合の透過係数 T は次式で与えられる。

$$T = \frac{1}{1 + \left(\frac{V_0^2}{4E(V_0 - E)}\right)^2 \sinh^2(\gamma d)}, \quad k \equiv \sqrt{\frac{2m_e E}{\hbar^2}}, \quad \gamma \equiv \sqrt{\frac{2m_e (V_0 - E)}{\hbar^2}}. \quad (1)$$

高さ $V_0 = 30\text{eV}$ 、幅 $d = 1.00\text{nm} = 10^{-9}\text{m}$ 、エネルギー $E = 10\text{eV}$ の場合に T の値を次の手順で計算せよ。(有効数字は2桁とする。) ただし、電子の質量 $m_e = 0.911 \times 10^{-30}\text{Kg}$ 、プランク定数 $\hbar \equiv \frac{h}{2\pi} = 1.05457266 \times 10^{-34}\text{J} \cdot \text{s}$, $1\text{eV} = 1.6 \times 10^{-19}\text{joule}$ を用いてよい。

1. ド・ブローイ波長 $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ を計算せよ。[nm 単位]
2. γd を計算せよ。
3. T を計算せよ。

(解答例)

1.

$$\begin{aligned} k &= \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} = \sqrt{\frac{2 \times 0.91 \times 10^{-30}\text{kg} \times 10 \times 1.6 \times 10^{-19}\text{joule}}{(1.05 \times 10^{-34}\text{joule} \cdot \text{s})^2}} \\ &= \sqrt{\left(\frac{2 \times 0.91 \times 1.6}{1.05^2}\right) \times 10^{-30+1-19+68} \times \left(\frac{\text{kg} \cdot \text{joule}}{\text{joule}^2 \cdot \text{s}^2}\right)}, \\ &= 1.62 \times 10^{10}\text{m}^{-1}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{2\pi}{k} = \frac{2 \times 3.1415926}{1.62 \times 10^{10}\text{m}^{-1}} = 3.88 \times 10^{-10}\text{m} \\ &= 0.388\text{nm}. \end{aligned} \quad (3)$$

2.

$$\begin{aligned} \gamma d &= \sqrt{\frac{2 \times 0.91 \times 10^{-30}\text{kg} \times 20 \times 1.6 \times 10^{-19}\text{joule}}{(1.05 \times 10^{-34}\text{joule} \cdot \text{s})^2}} \times (1.0 \times 10^{-9}\text{m}) \\ &= \sqrt{\left(\frac{2 \times 0.91 \times 3.2}{1.05^2}\right) \times 10^{(-30+1-19+68)-18} \times \left[\frac{\text{kg} \cdot \text{joule}}{(\text{joule} \cdot \text{s})^2}\right] \cdot \text{m}}, \\ \gamma d &= 22.2996 \approx 23.0. \end{aligned} \quad (4)$$

3.

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{1 + \frac{30^2}{4 \times 10 \times 20} \sinh^2(23)} \\ &\approx \frac{8}{9} \left(\frac{2}{e^{23}}\right)^2 \approx 3.74 \times 10^{-20}. \end{aligned} \quad (5)$$

(このように、 γd の値が大きい場合には透過係数は著しく小さくなる。)