

次のような一次元の階段型ポテンシャル障壁に左側から、エネルギー E の粒子 (質量 m) が進入する。エネルギー E がその障壁 V_0 よりも高い ($E > V_0$) の場合以下の問に答えよ。ただし、プランク定数を $\hbar \equiv \frac{h}{2\pi}$ とする。

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ V_0 & (x > 0) \end{cases}$$

1. 領域 I ($x \leq 0$), 領域 II ($x > 0$) ごとにシュレディンガー方程式とその一般解を記せ。
2. 波動関数についての境界条件より、特殊解の積分定数の比を求めよ。
3. 反射率 R 、透過率 T 、およびそれらの和を計算せよ。
4. $E > V_0$ の場合には、古典物理学的な粒子は領域 I ($x \leq 0$) には反射されないはずであるが、今の場合にはどうか。

(解答例)

3. 確率の流れ (inc 入射, ref 反射, trans 透過)

1. シュレディンガー方程式と一般解

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi_I = E \psi_I. \quad (1)$$

$$\rightarrow \frac{d^2}{dx^2} \psi_I = -k^2 \psi_I \quad (2)$$

$$k \equiv \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \quad (k: \text{波数}) \quad (3)$$

$$\psi_I(x) = A e^{ikx} + B e^{-ikx}. \quad (4)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi_{II} + V_0 \psi_{II} = E \psi_{II} \quad (5)$$

$$\rightarrow \frac{d^2}{dx^2} \psi_{II} = -k'^2 \psi_{II} \quad (6)$$

$$k' \equiv \sqrt{\frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2}} \quad (7)$$

$$\psi_{II}(x) = C e^{ik'x} (e^{-ik'x}: \text{後退波}) \quad (8)$$

2. 境界条件より

$$\psi_I(0) = \psi_{II}(0) \quad (9)$$

$$\rightarrow A + B = C \quad (10)$$

$$\psi'_I(0) = \psi'_{II}(0) \quad (11)$$

$$\rightarrow ik(A - B) = ik'C \quad (12)$$

$$\frac{B}{A} = \frac{k - k'}{k + k'}, \quad \frac{C}{A} = \frac{2k}{k + k'} \quad (13)$$

$$(14)$$

$$J_{inc} = \frac{\hbar}{2mi} [(A e^{ikx})^* \frac{\partial}{\partial x} (A e^{ikx}) - (A e^{ikx}) \frac{\partial}{\partial x} (A e^{ikx})^*] \quad (15)$$

$$= \frac{\hbar k}{m} |A|^2. \quad (16)$$

$$J_{ref} = \frac{\hbar}{2mi} [(B e^{-ikx})^* \frac{\partial}{\partial x} (B e^{-ikx}) - (B e^{-ikx}) \frac{\partial}{\partial x} (B e^{-ikx})^*] \quad (17)$$

$$= -\frac{\hbar k}{m} |B|^2. \quad (18)$$

$$R \equiv \frac{J_{ref}}{J_{inc}} = \left| \frac{B}{A} \right|^2 = \left(\frac{k - k'}{k + k'} \right)^2 \quad (19)$$

$$J_{trans} = \frac{\hbar}{2mi} [(C e^{ik'x})^* \frac{\partial}{\partial x} (C e^{ik'x}) - (C e^{ik'x}) \frac{\partial}{\partial x} (C e^{ik'x})^*] \quad (20)$$

$$= \frac{\hbar k'}{m} |C|^2. \quad (21)$$

$$T \equiv \frac{J_{trans}}{J_{inc}} = \frac{k'}{k} \left| \frac{C}{A} \right|^2 = \frac{4kk'}{(k + k')^2}. \quad (22)$$

$$R + T = 1.0. \quad (23)$$

4. 前問の結果より、反射率 $R < 1$ となり、古典的粒子描像とは異なり、部分的に反射する。対応して、透過率 $T < 1$ となり、透過率も 1.0 より減少する。