階段型障壁 1:steppot1-qa090525.tex

次のような一次元の階段型ポテンシャル障壁に左側から、エネルギー E の粒子（質量 m）が進入する。エネルギー E がその障壁 V_0 よりも低い（$0 < E < V_0$）場合以下の問に答えよ。ただし、プランク定数を $\hbar \equiv \frac{h}{2\pi}$ とする。

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (x \le 0) \\ V_0 & (x > 0) \end{cases}$$

1. 領域I$(x \le 0)$, 領域II（$x > 0$）ごとにシュレディンガー方程式を立てて、一般解を記せ。
2. 波動関数についての境界条件より、特殊解の積分定数の比を求めよ。
3. 反射率 R、透過率 T およびそれらの和を計算せよ。
4. $0 < E < V_0$ の場合には、古典物理学的には禁止される領域II$(x > 0)$ に進入できる確率が存在するどうか述べよ。

（解答例）

1. シュレディンガー方程式と一般解

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi_I = E\psi_I. \tag{1}$$

$$\to \frac{d^2}{dx^2}\psi_I = -k^2\psi_I \tag{2}$$

$$k \equiv \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \quad (k: \text{波数}) \tag{3}$$

$$\psi_I(x) = A\mathrm{e}^{ikx} + B\mathrm{e}^{-ikx}. \tag{4}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi_{II} + V_0\psi_{II} = E\psi_{II} \tag{5}$$

$$\to \frac{d^2}{dx^2}\psi_{II} = \gamma^2\psi_{II} \tag{6}$$

$$\gamma \equiv \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}} \tag{7}$$

$$\psi_{II}(x) = C\mathrm{e}^{-\gamma x} (\mathrm{e}^{\gamma x}\text{: 不適}) \tag{8}$$

2. 境界条件より

$$\psi_I(0) = \psi_{II}(0) \tag{9}$$

$$\to A + B = C \tag{10}$$

$$\psi_I'(0) = \psi_{II}'(0) \tag{11}$$

$$\to ik(A - B) = -\gamma C \tag{12}$$

$$\frac{B}{A} = \frac{ik+\gamma}{ik-\gamma}, \frac{C}{A} = \frac{2ik}{ik-\gamma} \tag{13}$$

(14)

3. 確率の流れ (inc 入射,ref 反射,trans 透過)

$$J_{inc} = \frac{\hbar}{2mi}[(A\mathrm{e}^{ikx})^*\frac{\partial}{\partial x}(A\mathrm{e}^{ikx}) -(A\mathrm{e}^{ikx})\frac{\partial}{\partial x}(A\mathrm{e}^{ikx})^*] \tag{15}$$

$$= \frac{\hbar k}{m}|A|^2. \tag{16}$$

$$J_{ref} = \frac{\hbar}{2mi}[(B\mathrm{e}^{-ikx})^*\frac{\partial}{\partial x}(B\mathrm{e}^{-ikx}) -(B\mathrm{e}^{-ikx})\frac{\partial}{\partial x}(B\mathrm{e}^{-ikx})^*] \tag{17}$$

$$= -\frac{\hbar k}{m}|B|^2. \tag{18}$$

$$R \equiv \frac{-S_{ref}}{S_{inc}} = |\frac{B}{A}|^2 = \frac{\gamma^2 + k^2}{(-\gamma)^2 + k^2} = 1 \tag{19}$$

$$J_{trans} = \frac{\hbar}{2mi}[(C\mathrm{e}^{-\gamma x})^*\frac{\partial}{\partial x}(C\mathrm{e}^{-\gamma x}) -(C\mathrm{e}^{-\gamma x})\frac{\partial}{\partial x}(C\mathrm{e}^{-\gamma x})^*] =$$

$$= \frac{\hbar}{2mi}[(C^*\mathrm{e}^{-\gamma x})C\cdot(-\gamma)\mathrm{e}^{-\gamma x} -C\mathrm{e}^{-\gamma x}C^*(-\gamma)\mathrm{e}^{-\gamma x}]$$

$$= \frac{\hbar|C|^2\gamma}{2mi}(-\mathrm{e}^{-2\gamma x} + \mathrm{e}^{-2\gamma x}) = 0 \tag{20}$$

$$T \equiv \frac{J_{trans}}{J_{inc}} = 0. \tag{21}$$

$$R + T = 1. \tag{22}$$

4. 前問の結果より、反射率 $R = 1$ となり、全反射する。しかし、古典的粒子描像とは異なり、障壁内部の存在確率

密度は $|\psi_{II}(x) = |C|\mathrm{e}^{-\gamma x}$ となり、部分的に侵入する確率がある。侵入距離の目安は $1/\gamma$ であり、$1/\sqrt{V_0 - E}$ に比例する。