

1. スピン演算子の行列表現の間に次の交換関係が成立することを示せ。

$$\hat{s}_x = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\hbar}{2} \\ \frac{\hbar}{2} & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{s}_y = \begin{bmatrix} 0 & -i\frac{\hbar}{2} \\ i\frac{\hbar}{2} & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{s}_z = \begin{bmatrix} \frac{\hbar}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\hbar}{2} \end{bmatrix}. \quad (1)$$

$$[\hat{s}_x, \hat{s}_y] = i\hbar\hat{s}_z, \quad [\hat{s}_y, \hat{s}_z] = i\hbar\hat{s}_x, \quad [\hat{s}_z, \hat{s}_x] = i\hbar\hat{s}_y. \quad (2)$$

2. スピン行列の2乗を $\hat{s}^2 \equiv \hat{s}_x^2 + \hat{s}_y^2 + \hat{s}_z^2$ と定義し、次のように表したとき、 s の値はどうなるかを求めよ。

$$\hat{s}^2 = s(s+1)\hbar^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

(解答例)

1.

$$\begin{aligned} [\hat{s}_x, \hat{s}_y] &= \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}, \\ &= \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 \left\{ \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \right\} = \frac{\hbar^2 i}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= i\hbar\hat{s}_z. \end{aligned} \quad (4)$$

2. 同様に、

$$\begin{aligned} [\hat{s}_y, \hat{s}_z] &= \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \right\}, \\ &= \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 \left\{ \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix} \right\} = \frac{\hbar^2 i}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= i\hbar\hat{s}_x. \end{aligned} \quad (5)$$

3. 同様に、

$$\begin{aligned} [\hat{s}_z, \hat{s}_x] &= \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\}, \\ &= \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\} = \frac{\hbar^2 i}{2} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \\ &= i\hbar\hat{s}_y. \end{aligned} \quad (6)$$

4.

$$\begin{aligned} \hat{s}^2 &= \frac{\hbar^2}{4} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \frac{3\hbar^2}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \rightarrow s(s+1) &= \frac{3}{4} \rightarrow \left(s - \frac{1}{2}\right)\left(s + \frac{3}{2}\right) = 0 \quad (s > 0) \\ \rightarrow s &= \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (7)$$