スピン(Spin)概念とその性質、応用

スピン自由度の導入の歴史と意味と応用

スピン演算子の正準交換関係

スピン演算子の昇降演算子

スピン演算子の行列表現

スピン演算子の固有状態とその意味

Made by R.Okamoto (Kyushu Institute of Technology)

Filename=spin-summary080611.ppt

スピン自由度の導入の歴史と意味と応用

原子からのスペクトルの二重線（doublet）の観測
1925年、ハウシュミット（Goudsmit）とウーレンベック(Uhlenbeck)
　スピン自由度の導入
　「電子は、その空間座標や運動量など（**外部自由度**）では表現
　できない、新しい自由度(**内部自由度**）とそれに付随する角運動量を持っている」。

1932年、ディラック（Dirac）の相対論的電子論（＝量子力学と特殊相対論の結合）
　　スピン自由度の起源は相対論にあること。
　　「マイナス・エネルギーをもつ電子の海」としての「真空」という解釈。
　　電子の反粒子としての陽電子（ポジトロン、positron）の予言。

物質構成粒子としてのフェルミ型粒子（フェルミオン、fermion）と相互作用媒介粒子としてのボース型粒子（ボソン、boson）、それらを区別する半整数スピン値と整数スピン値

物質の磁性の原因としての電子のスピン自由度

測定技術への応用：電子スピン共鳴（ESR,electron-spin resonance）

スピン＝自転？？

スピン演算子の正準交換関係

$$\hat{\mathbf{s}} \equiv (\hat{s}_x, \hat{s}_y, \hat{s}_z),$$

$$\hat{\mathbf{s}}^2 \equiv \left(\hat{s}_x\right)^2 + \left(\hat{s}_y\right)^2 + \left(\hat{s}_z\right)^2,$$

$$[\hat{s}_x, \hat{s}_y] = i\hbar \hat{s}_z, [\hat{s}_y, \hat{s}_z] = i\hbar \hat{s}_x, [\hat{s}_z, \hat{s}_x] = i\hbar \hat{s}_y,$$

$$[\hat{s}_x, \hat{\mathbf{s}}^2] = [\hat{s}_y, \hat{\mathbf{s}}^2] = [\hat{s}_z, \hat{\mathbf{s}}^2] = 0.$$

スピン演算子のx、y、z成分はお互いに同時固有状態を持たないこと

スピン演算子の2乗とx、y、z成分のどれかひとつは
お互いに同時固有状態を持つこと

$\longrightarrow$ 通常はスピン演算子の二乗とz成分の同時固有状態を考える
(量子化軸としてz軸に選ぶこと)

スピン演算子の昇降演算子を導入する

$$\hat{s}_{\pm} \equiv \hat{s}_x \pm \mathrm{i}\hat{s}_y$$

$$\rightarrow \hat{s}_x = \left(\hat{s}_+ + \hat{s}_-\right)/2,\ \hat{s}_y = \left(\hat{s}_+ - \hat{s}_-\right)/2\mathrm{i}$$

$$\rightarrow \hat{\mathbf{s}}^2 = \hat{s}_+\hat{s}_- + \left(\hat{s}_z\right)^2 - \hat{s}_z$$

スピン演算子の固有値と固有関数(固有状態)

$$\hat{\mathbf{s}}^2 \left| s\,m \right\rangle = \hbar^2 s(s+1) \left| s\,m \right\rangle, \; s = \tfrac{1}{2}$$

$$\hat{s}_z \left| s\,m \right\rangle = \hbar\, m \left| s\,m \right\rangle, \; m = \pm \tfrac{1}{2}$$

$$\hat{s}_\pm \left| s\,m \right\rangle = \hbar \sqrt{\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}+1) - m(m\pm 1)} \left| \ell\, m \pm 1 \right\rangle,$$

$$\left\langle \tfrac{1}{2} m' \middle| \tfrac{1}{2} m \right\rangle = \delta_{mm'}$$

$$\Downarrow$$

パウリ(Pauli)のスピン行列

スピン演算子の行列表現

$$\hat{s}_x = \tfrac{\hbar}{2} \hat{\sigma}_x, \; \hat{s}_y = \tfrac{\hbar}{2} \hat{\sigma}_y, \; \hat{s}_z = \tfrac{\hbar}{2} \hat{\sigma}_z$$

$$\hat{\sigma}_x \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; \hat{\sigma}_y \equiv \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \; \hat{\sigma}_z \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left\langle sm' \middle| \hat{s}_z \middle| s\,m \right\rangle = \hbar\, m\, \delta_{mm'},$$

$$\left\langle sm' \middle| \hat{\mathbf{s}}^2 \middle| sm \right\rangle = \hbar^2 \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}+1)\delta_{mm'}, \\ = \tfrac{3}{4}\hbar^2\, \delta_{mm'}$$

$$\left\langle sm' \middle| \hat{s}_\pm \middle| sm \right\rangle = \hbar \sqrt{\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}+1) - m(m\pm 1)}\, \delta_{m', m\pm 1}$$

$$\hat{s}_+ = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; \hat{s}_- = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; \hat{\mathbf{s}}^2 = \tfrac{3}{4}\hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

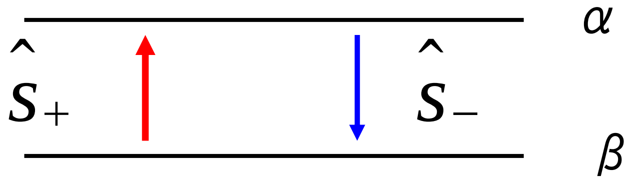
スピン演算子の固有状態とその意味

$$\left|s, m=+\tfrac{1}{2}\right\rangle \equiv \left|\alpha\right\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \left|s, m=-\tfrac{1}{2}\right\rangle \equiv = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \hat{s}_{+}\left|\beta\right\rangle = \hbar\left|\alpha\right\rangle, \hat{s}_{+}\left|\alpha\right\rangle = 0,$$

$$\hat{s}_{-}\left|\alpha\right\rangle = \hbar\left|\beta\right\rangle, \hat{s}_{-}\left|\beta\right\rangle = 0$$

スピン演算子の昇降演算子



2進法（0，1）→bit

おまけ：

$$\left|\alpha\right\rangle\left\langle\alpha\right| \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}(1,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \left|\beta\right\rangle\left\langle\beta\right| \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}(0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \left|\alpha\right\rangle\left\langle\alpha\right| + \left|\beta\right\rangle\left\langle\beta\right| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}: \text{単位行列}$$

これは一体何を意味するのだろうか？