[2つの電子スピン角運動量の合成]filename=spin-spin-coupling-qa080616.tex

2つの電子のスピン角運動量演算子 (ベクトル) $\hat{\boldsymbol{s}}_1, \hat{\boldsymbol{s}}_2$ から合成される全スピン角運動量演算子 (ベクトル) $\hat{\boldsymbol{S}} = \hat{\boldsymbol{s}}_1 + \hat{\boldsymbol{s}}_2$ を考える。

1. $\hat{\boldsymbol{s}}_1^2, \hat{\boldsymbol{s}}_2^2$ の固有値を同じ $\hbar^2 s(s+1), (s=1/2)$ と表し、$\hat{\boldsymbol{S}}^2$ の固有値を $\hbar^2 S(S+1), (S:$ 大文字) と表すとき、S のとりうる値を記せ。

2. ベクトルの2乗は同じベクトルの内積であることを用いて、$\hat{\boldsymbol{s}}_1 \cdot \hat{\mathbf{s}}_2$ を $S, \hbar$ で表す式を求めよ。(スピン演算子の固有ベクトルに作用したと見なせ。)

(解答例)

1. 角運動量の合成則 (ベクトル模型) と角運動量の量子化 (離散性)、電子スピン $s = 1/2$ であることを考慮して、$S = 0, 1$ である。

2. $\hat{\boldsymbol{S}} = \hat{\boldsymbol{s}}_1 + \hat{\boldsymbol{s}}_2$ の両辺を2乗する (同じベクトルの内積をとる) と

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{S}}^2 &= (\hat{\boldsymbol{s}}_1 + \hat{\boldsymbol{s}}_2) \cdot (\hat{\boldsymbol{s}}_1 + \hat{\boldsymbol{s}}_2) \\ \rightarrow \hat{\boldsymbol{S}}^2 &= \hat{\boldsymbol{s}}_1^2 + 2\hat{\boldsymbol{s}}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{s}}_2 + \hat{\boldsymbol{s}}_2^2. \qquad (1) \end{aligned}$$

ここで、2つの電子のスピン角運動量演算子 $\hat{\boldsymbol{s}}_1, \hat{\boldsymbol{s}}_2$ の順序は可換であることを用いた。式 (1) より、

$$\hat{\boldsymbol{s}}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{s}}_2 = \frac{\hbar^2}{2} \left[S(S+1) - \frac{3}{2} \right] \qquad (2)$$

となる。