xy 面上の回転運動（z 軸まわりの回転子）を考える。以下の問いに答えよ。

1. z 軸まわりに、質量 m の二つの粒子が長さ $2r$ の十分軽い硬い棒で結びつけられて (棒の中点を z 軸が貫く形で)、角速度 ω で回転している。古典力学における角運動量の z 成分 ℓ_z と慣性モーメント I を用いて、この系の運動エネルギーを表す式を導け。
2. 角運動量演算子の z 成分 ℓ_z が z 軸まわりの角度 ϕ を用いて次のように表される。

$$\hat{\ell}_z = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\phi} \tag{1}$$

   この $\hat{\ell}_z$ の固有値方程式の一般解、規格化定数を求め、固有関数の角度変数についての一価性より、角運動量は $\hbar$ を単位とする離散的な値しか取れないことを示せ。
3. 　最初の問の結果において角運動量の z 成分 ℓ_z を量子化したものを回転子のハミルトニアン（ハミルトン演算子）とみなして、その固有値を求め、エネルギーが連続的か離散的か述べよ。またエネルギーの縮退についても述べよ。

(解答例)

1. 粒子の速さ v は $v = r\omega$ となるので、

$$\ell_z = rmv \times 2 = 2mr^2\omega. \tag{2}$$

   この系の慣性モーメントは次のようになる。

$$I = mr^2 + mr^2 = 2mr^2. \tag{3}$$

   したがって、運動エネルギー K は次のように求まる：

$$\begin{aligned} K &= \frac{mv^2}{2} \times 2 = m(r\omega)^2 = mr^2\left(\frac{\ell_z}{2mr^2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2I}\ell_z^2. \end{aligned} \tag{4}$$

2. 題意より、固有関数を $\Phi(\phi)$ とすると

$$\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\Phi(\phi)}{\partial\phi} = \alpha\Phi(\phi). \tag{5}$$

   指数関数の性質を考えると、この微分方程式の一般解は

$$\Phi(\phi) = N\exp(i\frac{\alpha\phi}{\hbar}), (N : \text{規格化定数}) \tag{6}$$

   となる。固有関数の規格化を行うことにより規格化定数を決める。

$$1 = \int_0^{2\pi} |\Phi(\phi)|^2 d\phi = N^2\int_0^{2\pi} d\phi \tag{7}$$

$$\to N = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tag{8}$$

題意より

$$\Phi(\phi+2\pi)=\Phi(\phi)\rightarrow 1=\exp(i\frac{2\pi\alpha}{\hbar}) \tag{9}$$

$$\rightarrow \frac{\alpha}{\hbar}=m,(m=0,\pm1,\pm2,\cdots). \tag{10}$$

この結果のように、角運動量は $\hbar$ を単位とする離散的な値しか許されないことになる。（角運動量の量子化）。

3. 題意より、この回転子のハミルトニアンは

$$\hat{H}=\frac{1}{2I}\hat{\ell}_z^2 \tag{11}$$

となる。この演算子 $\hat{H}$ と $\hat{\ell}_z$ は交換する、$[\hat{\ell}_z,\hat{H}]=0$。したがって、同時固有状態となる（同時固有関数をもつ）。

$$\hat{H}\Phi(\phi)=E\Phi(\phi). \tag{12}$$

前問の結果を用いると

$$E_m = \frac{\hbar^2}{2I}m^2,\ (m=0,\pm1,\pm2,\cdots) \tag{13}$$

$$E_0=0,E_1=\frac{\hbar^2}{2I},E_2=\frac{4\hbar^2}{2I}=4E_1,\cdots \tag{14}$$

すなわち、回転子のエネルギーは離散的である（量子化される）。さらに m に対するエネルギーと $-m$ に対するエネルギーは同じである。すなわち、異なる量子数に対してエネルギーが同じになるので、縮退しているという。