

周期的に変動する外力をうける2準位系ー Rabi システムー

filename=Rabi-system060628c.tex

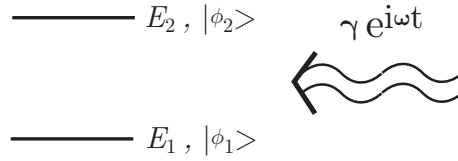
全系のハミルトニアンは、無摂動系のハミルトニアンを $\hat{H}_0$ 、摂動ポテンシャルを $\hat{V}$ として

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V} \quad (1)$$

であり、時間に依存しない無摂動系のシュレディンガー方程式は

$$\hat{H}_0 |\phi_k\rangle = E_k |\phi_k\rangle, \quad (k = 1, 2) \quad (2)$$

である。



ここで、無摂動状態は、つぎのように、直交規格化条件を満たすとする。

$$\langle \phi_k | \phi_{k'} \rangle = \delta_{kk'} \quad (k, k' = 1, 2) \quad (3)$$

周期的に変動する外力のポテンシャル演算子 $\hat{V}$ の行列要素は

$$\langle \phi_1 | \hat{V} | \phi_1 \rangle = \langle \phi_2 | \hat{V} | \phi_2 \rangle = 0, \quad (4)$$

$$\langle \phi_1 | \hat{V} | \phi_2 \rangle = \gamma e^{i\omega t}, \quad \langle \phi_2 | \hat{V} | \phi_1 \rangle = \langle \phi_1 | \hat{V} | \phi_2 \rangle^* = \gamma e^{-i\omega t} \quad (5)$$

で与えられているとする。また、時間依存の定常状態は

$$|\psi_k(t)\rangle \equiv |\phi_k\rangle e^{-iE_k t/\hbar} = |\phi_k\rangle e^{-i\omega_k t}, \quad (\omega_k \equiv E_k/\hbar, \quad k = 1, 2) \quad (6)$$

と表することができる。これらを用いて時間的に変動する量子状態は、次のように表することができる。

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle &\equiv c_1(t) |\psi_1(t)\rangle + c_2(t) |\psi_2(t)\rangle \\ &\equiv c_1(t) e^{-i\omega_1 t} |\phi_1\rangle + c_2(t) e^{-i\omega_2 t} |\phi_2\rangle \end{aligned} \quad (7)$$

そこで、全系の、時間に依存するシュレディンガー方程式

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle = \hat{H} |\Psi(t)\rangle \quad (8)$$

について、初期条件 $c_1(0) = 1, c_2(0) = 0$ の下で解くことを考える。

まず、左辺の計算を行うと

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle = [i\hbar \frac{dc_1}{dt} + c_1 \cdot E_1] e^{-i\omega_1 t} |\phi_1\rangle + [i\hbar \frac{dc_2}{dt} + c_2 \cdot E_2] e^{-i\omega_2 t} |\phi_2\rangle \quad (9)$$

となり、続いて右辺の計算を行うと

$$\begin{aligned} \hat{H} |\Psi(t)\rangle &= c_1 \cdot e^{-i\omega_1 t} \cdot E_1 |\phi_1\rangle + c_2 \cdot e^{-i\omega_2 t} \cdot E_2 |\phi_2\rangle \\ &\quad + c_1 \cdot e^{-i\omega_1 t} \cdot \hat{V} |\phi_1\rangle + c_2 \cdot e^{-i\omega_2 t} \cdot \hat{V} |\phi_2\rangle \end{aligned} \quad (10)$$

が得られる。そこで、両辺に左から $\langle \phi_1 |$ との内積をとると

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{dc_1}{dt} &= e^{i(\omega_1 - \omega_2)t} \cdot \gamma e^{i\omega t} \cdot c_2 \\ &= \gamma e^{i(\omega - \omega_{21})t} \cdot c_2. \end{aligned} \quad (11)$$

となる。ここで、式 (3), (4), (5) と定義

$$\omega_{21} \equiv \omega_2 - \omega_1 = (E_2 - E_1)/\hbar \quad (12)$$

を用いた。同様にして、左から $\langle \phi_2 |$ との内積をとると

$$i\hbar \frac{dc_2}{dt} = \gamma e^{-i(\omega - \omega_{21})t} \cdot c_1 \quad (13)$$

が得られる。さらに、式 (11) と式 (13) の両辺を時間 t で微分を行い、それぞれに式 (11), (13) を用いて整理すると

$$\frac{d^2 c_1}{dt^2} = i(\omega - \omega_{21}) \frac{dc_1}{dt} - \left(\frac{\gamma}{\hbar}\right)^2 c_1 \quad (14)$$

$$\frac{d^2 c_2}{dt^2} = -i(\omega - \omega_{21}) \frac{dc_2}{dt} - \left(\frac{\gamma}{\hbar}\right)^2 c_2 \quad (15)$$

となり、係数 c_1, c_2 それぞれの微分方程式を得ることができる。次に、この式から 1 階微分の係数を消去するために、次のような変数変換を行う。

$$c_1(t) = a_1(t) \cdot e^{i(\omega - \omega_{21})t/2} = a_1(t) \cdot e^{iWt}, \quad (16)$$

$$c_2(t) = a_2(t) \cdot e^{-i(\omega - \omega_{21})t/2} = a_2(t) \cdot e^{-iWt}, \quad (W \equiv (\omega - \omega_{21})/2). \quad (17)$$

ここで、文字変数 W を数式の変形上の煩雑さをさけるために導入した。係数 c_1 の 1 階、2 階微分係数を計算すると、それぞれ

$$\dot{c}_1 = \dot{a}_1 \cdot e^{iWt} + iW \cdot a_1 \cdot e^{iWt}, \quad (18)$$

$$\ddot{c}_1 = \ddot{a}_1 \cdot e^{iWt} + 2i\dot{a}_1 \cdot W \cdot e^{iWt} - a_1 \cdot W^2 e^{iWt} \quad (19)$$

が得られる。同様に、係数 c_2 の 1 階、2 階微分係数を計算すると

$$\dot{c}_2 = \dot{a}_2 \cdot e^{-iWt} - iW \cdot a_2 \cdot e^{-iWt}, \quad (20)$$

$$\ddot{c}_2 = \ddot{a}_2 \cdot e^{-iWt} - 2i\dot{a}_2 \cdot W \cdot e^{-iWt} - a_2 \cdot W^2 e^{-iWt} \quad (21)$$

となる。これらの式 (16),(18),(19) を式 (14) 代入すると、時間についての 1 階微分の項が相殺されて

$$\frac{d^2 a_1}{dt^2} = - \left[\frac{\gamma^2}{\hbar^2} + \frac{(\omega - \omega_{21})^2}{4} \right] a_1 \quad (22)$$

$$= -\Omega^2 a_1, \quad (23)$$

$$\Omega \equiv \sqrt{\frac{\gamma^2}{\hbar^2} + \frac{(\omega - \omega_{21})^2}{4}} \quad (\Omega : \text{Rabi 振動数}) \quad (24)$$

が得られる。同様にして、式 (17),(20),(21) を式 (15) 代入すると

$$\frac{d^2 a_2}{dt^2} = -\Omega^2 a_2 \quad (25)$$

が得られる。係数 a_1, a_2 の一般解は、適当な積分定数 A_1, B_1, A_2, B_2 を用いて

$$a_1(t) = A_1 \cos \Omega t + B_1 \sin \Omega t, \quad (26)$$

$$a_2(t) = A_2 \cos \Omega t + B_2 \sin \Omega t \quad (27)$$

と書ける。係数 c_1, c_2 の一般解は

$$c_1(t) = (A_1 \cos \Omega t + B_1 \sin \Omega t) e^{i(\omega - \omega_{21})t/2}, \quad (28)$$

$$c_2(t) = (A_2 \cos \Omega t + B_2 \sin \Omega t) e^{-i(\omega - \omega_{21})t/2} \quad (29)$$

となる。初期条件 $t = 0$ のとき $c_1(0) = 1, c_2(0) = 0$ より、 $A_1 = 1, A_2 = 0$ が得られる。このとき、係数 c_1, c_2 の特殊解は

$$c_1(t) = (\cos \Omega t + B_1 \sin \Omega t) e^{i(\omega - \omega_{21})t/2}, \quad (30)$$

$$c_2(t) = B_2 \sin \Omega t \cdot e^{-i(\omega - \omega_{21})t/2} \quad (31)$$

となる。ここで、式 (30),(31) の両辺を時間 t で微分すると

$$\begin{aligned} \frac{dc_1}{dt} &= [-\Omega \sin \Omega t + \Omega B_1 \cos \Omega t] e^{i(\omega - \omega_{21})t/2} \\ &\quad + [\cos \Omega t + B_1 \sin \Omega t] \frac{i(\omega - \omega_{21})}{2} e^{i(\omega - \omega_{21})t/2}, \end{aligned} \quad (32)$$

$$\frac{dc_2}{dt} = \Omega B_2 \cos \Omega t e^{-i(\omega - \omega_{21})t/2} - B_2 \sin \Omega t \frac{i(\omega - \omega_{21})}{2} e^{-i(\omega - \omega_{21})t/2} \quad (33)$$

が得られる。さらに、式 (32) を式 (11) に、式 (33) を式 (13) に代入して、再び初期条件 $c_1(0) = 1, c_2(0) = 0$ を用いると積分定数が

$$B_1 = -\frac{i(\omega - \omega_{21})}{2\Omega}, \quad B_2 = \frac{\gamma}{i\hbar\Omega} \quad (34)$$

のように決まる。したがって、量子状態の時間的遷移を表す係数は

$$c_1(t) = \left[\cos \Omega t - \frac{i(\omega - \omega_{21})}{2\Omega} \sin \Omega t \right] e^{i(\omega - \omega_{21})t/2}, \quad (35)$$

$$c_2(t) = \frac{\gamma}{i\hbar\Omega} \sin \Omega t \cdot e^{-i(\omega - \omega_{21})t/2} \quad (36)$$

と求まる。そして、元のエネルギー準位にある相対的確率は、それぞれ、

$$|c_1(t)|^2 = \cos^2 \Omega t + \left[\frac{(\omega - \omega_{21})}{2\Omega} \right]^2 \sin^2 \Omega t, \quad (37)$$

$$|c_2(t)|^2 = \left[\frac{\gamma}{\hbar\Omega} \right]^2 \sin^2 \Omega t \quad (38)$$

$$(39)$$

となる。無論、 $|c_1(t)|^2 + |c_2(t)|^2 = 1$ は成立している。