

幅 L の 1 次元無限量子井戸に閉じ込められた質量 m の粒子のとり得るエネルギーは

$$E_n = \left(\frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} \right) n^2, \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (1)$$

のように離散化される。ここで、 h はプランク定数、 $\hbar \equiv h/2\pi$ はディラック定数である。量子効果を見出すためには、量子化されたエネルギー間隔が熱運動による平均エネルギーよりも十分に大きくなければならない。

1. 基底状態と第一励起状態のエネルギー間隔が $k_B T$ よりも大きいという条件より、 L が満たすべき条件式を求めよ。(文字式を用いよ。)
2. ボルツマン定数として $k_B = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/deg}$ を使い、絶対温度として、常温相当の温度 $T = 273 + 15(\text{K})$ を選んだ場合、 $k_B T$ の値が約 40 分の 1 電子ボルト程度になることを確かめよ。
3. 粒子の質量として電子質量を用いた場合、無限量子井戸の幅 L は約何オングストローム (Å) 以下でなければならないか。 $c\hbar \cong 1977 \text{ eV} \cdot \text{Å}$, $mc^2 \cong 0.5 \times 10^6 \text{ eV}$ とする。(ここで、eV は電子ボルトという微視的世界の典型的なエネルギーの単位で $1 \text{ eV} \cong 1.60 \times 10^{-19} \text{ J}$ であり、同じく Å は $\text{Å} = 10^{-10} \text{ m}$ である。)(ヒント：エネルギーの式の分母分子に c^2 を書けよ。)
4. 半導体中の電子のように、(有効)質量が電子質量の 10 分の 1 である (有効質量) 場合にはどうか。

(解答例)

1.

$$\begin{aligned} E_2 - E_1 &> k_B T \rightarrow \left(\frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} \right) \times 3 > k_B T \\ \rightarrow L &< \sqrt{\frac{3\pi^2 \hbar^2}{2mk_B T}} \end{aligned} \quad (2)$$

2.

$$\begin{aligned} k_B T &= 1.38 \times 10^{-23} \frac{\text{eV}}{\text{deg}} \times 288 \text{ deg} \frac{1}{1.6 \times 10^{-19}} \\ &= 0.0248 \text{ eV}. \end{aligned} \quad (3)$$

3.

$$L < 68.2 \text{ Å}. \quad (4)$$

4.

$$L < 216 \text{ Å}. \quad (5)$$