

シュレディンガー方程式を満たす波動関数 $\psi(x)$ とその複素共役を用いて、次のように定義される確率流れ密度 $J(\psi(x))$ について以下の問いに答えよ。

$$J(\psi(x)) = \frac{i\hbar}{2m} \left[\frac{d\psi^*(x)}{dx} \psi(x) - \psi^*(x) \frac{d\psi(x)}{dx} \right]. \quad (1)$$

1. 複素数の定数 A と実数の定数 γ を用いて、波動関数が $\psi(x) = Ae^{-\gamma x}$ と与えられる場合、確率流れ密度 $J(\psi(x))$ を計算せよ。
2. 複素数の定数 A, B と実数の定数 γ を用いて、波動関数が $\psi(x) = Ae^{-\gamma x} + Be^{\gamma x}$ と与えられる場合、確率流れ密度 $J(\psi(x))$ を計算せよ。
3. 前問において、複素定数 A, B の間に、位相差 θ がある場合、確率流れ密度 $J(\psi(x))$ を $\hbar, \gamma, |A|, |B|, m, \theta$ で表す式を求めよ。ここで位相差 θ とは、複素数の極表示 ($A = |A|e^{i\theta_A}, B = |B|e^{i\theta_B}$) において、 $\theta_B - \theta_A$ のことである。

(解答例)

1. 題意より

$$\frac{d\psi(x)}{dx} = -A\gamma e^{-\gamma x}, \quad \psi^*(x) = A^* e^{-\gamma x} \rightarrow \frac{d\psi^*(x)}{dx} = -A^* \gamma e^{-\gamma x}, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \rightarrow J(\psi(x)) &= \frac{i\hbar}{2m} [-A^* \gamma e^{-\gamma x} \times Ae^{-\gamma x} + A^* e^{-\gamma x} \times A\gamma e^{-\gamma x}] \\ J(\psi(x)) &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

2. 題意より

$$\begin{aligned} \frac{d\psi(x)}{dx} &= \gamma(-Ae^{-\gamma x} + Be^{\gamma x}), \\ \psi^*(x) &= A^* e^{-\gamma x} + B^* e^{\gamma x} \rightarrow \frac{d\psi^*(x)}{dx} = \gamma(-A^* e^{-\gamma x} + B^* e^{\gamma x}), \\ \rightarrow J(\psi(x)) &= \frac{i\hbar}{2m} [\gamma(-A^* e^{-\gamma x} + B^* e^{\gamma x}) \times (Ae^{-\gamma x} + Be^{\gamma x}) \\ &\quad - (A^* e^{-\gamma x} + B^* e^{\gamma x}) \times \gamma(-Ae^{-\gamma x} + Be^{\gamma x})] \\ \rightarrow J(\psi(x)) &= \frac{i\hbar\gamma}{m} (AB^* - A^* B). \end{aligned} \quad (4)$$

3. 前問の結果を次のように書きなおせる。

$$J(\psi(x)) = \frac{i\hbar\gamma|AB|}{m} \left(\frac{A}{|A|} \frac{B^*}{|B|} - \frac{A^*}{|A|} \frac{B}{|B|} \right). \quad (5)$$

ここで、題意より

$$\frac{A}{|A|} = e^{i\theta_A}, \quad \frac{B}{|B|} = e^{i\theta_B}. \quad (6)$$

これらの式を式(5)に代入すると

$$\begin{aligned} J(\psi(x)) &= \frac{i\hbar\gamma|A||B|}{m} (e^{i\theta_A}e^{-i\theta_B} - e^{i\theta_B}e^{-i\theta_A}) \\ &= \frac{i\hbar\gamma|A||B|}{m} (e^{-i\theta} - e^{i\theta}) \\ &= \frac{2\hbar\gamma|A||B|}{m} \sin\theta \end{aligned} \tag{7}$$

が得られる。

(参考：この問題の前提となる波動関数は有限の量子井戸におけるエバネッセント波(浸透波または減衰波, evanescent wave)と呼ばれるもので、観測による変化が位相差に影響する可能性とそのハイテクへの応用が研究されつつある。大津・小林「近接場光の基礎」オーム社、堀・井上「ナノスケールの光学」オーム社を参照のこと。)