(一次元無限大ポテンシャル箱（軸対称)

次のような一次元無限大ポテンシャル箱（井戸）の中の粒子（質量 m）について，n 番目のエネルギー固有値 E_n を計算せよ。ただし、プランク定数 h により $\hbar \equiv h/2\pi$ を定義する。

$$U(x) = \begin{cases} 0 & (-\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2}) \\ \infty & (|x| \geq \frac{a}{2}). \end{cases}$$

（解答例）

シュレディンガー方程式は次のようになる。

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi = E\psi \quad (1)$$

$$\to \frac{d^2}{dx^2}\psi = -k^2\psi \quad (2)$$

$$k \equiv \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \quad (k：波数) \quad (3)$$

一般解

$$\psi(x) = A\sin(ka) + B\sin(ka) \quad (4)$$

境界条件より

$$\begin{aligned} 0 &= \psi(-\frac{a}{2}) \\ &= -A\sin(\frac{ak}{2}) + B\cos(\frac{ak}{2}). \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} 0 &= \psi(\frac{a}{2}) \\ &= A\sin(\frac{ak}{2}) + B\cos(\frac{ak}{2}). \end{aligned} \quad (6)$$

ゆえに次の 2 つの場合に分けられる。

$$\sin(\frac{ak}{2}) = 0 \quad または \cos(\frac{ak}{2}) = 0. \quad (7)$$

1. $\sin(\frac{ak}{2}) = 0$ の場合

$$\frac{ak}{2} = \pi \times n \ \ (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

$$k = \frac{\pi}{a} \times 2n. \quad (8)$$

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2} \times (2n)^2. \quad (9)$$

2. $\cos(\frac{ak}{2}) = 0$ の場合

$$\frac{ak}{2} = \frac{\pi}{2} \times (2n+1) \ \ (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

$$k = \frac{\pi}{a} \times (2n+1). \quad (10)$$

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2} \times (2n+1)^2. \quad (11)$$

以上よりいずれの場合にも

$$E = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2} \times n^2 \ \ (n = 0, 1, 2, \cdots). \quad (12)$$