電荷 e をもつ 1 次元調和振動子の振動方向に、時間依存性が次式で与えられる一様な電場 $E(t)$ をかけるとする。

$$E(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ E_0 \exp(-\frac{t}{\tau}) & (t \geq 0),\ (\tau : \text{constant} > 0) \end{cases} \tag{1}$$

この時刻 $t = 0$ で, 量子数 $n = 1$ をもつ状態（固有波動関数 $\phi_{n=1}(x)$）にある振動子が十分長い時間の後、量子数 k, 固有波動関数 $\phi_k(x)$ の状態に見出される確率を次の手順で求めよ。ただし

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_k^*(x) \cdot x \cdot \phi_n(x) dx = \begin{cases} \sqrt{\frac{n+1}{2}}\frac{1}{\alpha} & (k = n+1) \\ \sqrt{\frac{n}{2}}\frac{1}{\alpha} & (k = n-1) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \tag{2}$$

という結果を用いてよい。

1. おもりの質量 m, 角振動数 ω の 1 次元調和振動子のハミルトニアン $\hat{H}_0$(=無摂動ハミルトニアン）に対するシュレディンガー方程式を記せ。
2. この外部電場による摂動ハミルトニアン $\hat{H}' = eE(t)x$ の行列要素 $H'_{kn} \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_k^*(x) \cdot \hat{H}' \cdot \phi_n(x) dx$ を計算せよ。
3. 時刻 t における、量子数 $n = 1$ をもつ状態から量子数 k をもつ状態への遷移行列要素 $C_{k1}(t) \equiv (1/i\hbar) \int_0^t H'_{k1} \exp(i\omega_{k1} \cdot t') dt'$ を計算せよ。ただし、$\omega_{k1} \equiv (E_k - E_1)/\hbar$.
4. $|C_{k1}(t \to \infty)|^2$ を計算せよ。

(解答例)

1. 題意より

$$[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2]\phi_n(x) = E_n \phi_n(x), (n = 0, 1, 2, \cdots).(E_n \equiv \hbar\omega(n + \frac{1}{2})) \tag{3}$$

2. 題意より

$$H'_{k1} = eE_0 \exp(-\frac{t}{\tau}) \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_k^*(x) \cdot x \cdot \phi_n(x) dx = eE_0 \exp(-\frac{t}{\tau}) \quad \begin{cases} \frac{1}{\alpha} & (k = 2) \\ \sqrt{\frac{1}{2}}\frac{1}{\alpha} & (k = 0) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \tag{4}$$

3. 式 (2) の α に関係部分する部分を $f_{kn}(\alpha)$ と表すと

$$\begin{aligned} C_{k1}(t) &= (\frac{eE_0}{i\hbar}) \int_0^t \exp(-\frac{t'}{\tau}) \exp(i\omega_{k1} \cdot t') dt' \times f_{k1}(\alpha) \\ &= (\frac{eE_0}{i\hbar}) \left[\frac{\exp((i\omega_{k1} - \frac{1}{\tau})t) - 1}{i\omega_{k1} - \frac{1}{\tau}} \right] f_{k1}(\alpha) \end{aligned} \tag{5}$$

となる。

4.

$$
\begin{aligned}
|C_{k1}(t\to\infty)|^2 &= \lim_{t\to\infty}(\frac{eE_0}{\hbar})^2\left[\frac{\exp((i\omega_{k1}-\frac{1}{\tau})t)-1}{i\omega_{k1}-\frac{1}{\tau}}\right] \\
&\qquad\times\left[\frac{\exp((-i\omega_{k1}-\frac{1}{\tau})t)-1}{-i\omega_{k1}-\frac{1}{\tau}}\right]\times(f_{k1}(\alpha))^2 \\
&= \lim_{t\to\infty}\left(\frac{eE_0}{\hbar}\right)^2\frac{\exp(-\frac{2t}{\tau})-2\exp(-\frac{t}{\tau})\cos(\omega t)+1}{(\frac{1}{\tau})^2+(\omega_{k1})^2}\times(f_{k1}(\alpha))^2 \\
\to|C_{k1}(t\to\infty)|^2 &= \left(\frac{eE_0}{\hbar}\right)^2\times\frac{1}{(\frac{1}{\tau})^2+(\omega_{k1})^2}\times(f_{k1}(\alpha))^2 \\
&= \left(\frac{eE_0}{\hbar\alpha}\right)^2\times\frac{\tau^2}{1+(\omega\tau)^2}\times\begin{cases}\frac{1}{2} & (k=0)\\ 1 & (k=2)\\ 0 & (\text{otherwise})\end{cases}
\end{aligned} \tag{6}
$$

となる。ここで $\mathrm{e}^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta(\theta:\text{実数})$, $\omega_{k1}=(E_k-E_1)/\hbar=(k-1)\omega$ という関係を用いた。