

一般に、原子の中の電子は原子核のまわりの軌道角運動量とスピン角運動量をもっている。電子は、これらの角運動量に起因する磁気モーメントをもつ。磁気モーメントは、磁石と類似した性質をもち、二つの磁石間の相互ポテンシャルエネルギーが考えられるように、それらの間には相互作用が発生する。この相互作用のハミルトニアン H_{so} は、 λ_{so} を適当な定数、軌道角運動量とスピン角運動量を $\vec{\ell}, \vec{s}$ として、近似的に $H_{so} = (\lambda_{so}/\hbar^2)\vec{\ell} \cdot \vec{s}$ と表される。

1. 電子の全角運動量 $\vec{j}$ は軌道角運動量 $\vec{\ell}$ とスピン $\vec{s}$ のベクトル和である。このとき、 $\vec{\ell} \cdot \vec{s}$ を求めよ。(ただし、 $\vec{\ell}$ と $\vec{s}$ は交換することを用いよ。)
2. 一般に、 $\vec{j}^2$ の固有状態は $\psi_{j=\ell+1/2}, \psi_{j=\ell-1/2}$ の二つがある。これらの固有状態は、 $\vec{\ell}^2$ の固有状態と $\vec{s}^2$ の固有状態の積の一次結合であるから、同時に $\vec{\ell}^2, \vec{s}^2$ の固有状態でもある。この固有状態に対して、 $\vec{\ell} \cdot \vec{s}$ を作用させた値を全角運動量 j 、方位量子数 ℓ 、および $\hbar (= h/2\pi$: プランク定数 h) を用いて表せ。
3. スピン軌道相互作用を摂動と考えると、その1次の摂動エネルギーの差としてスピン軌道分岐 ΔE を求めよ(=数式で表現せよ)。
4. Na原子の(電子の) p 状態($\ell = 1$)は二つのエネルギー準位に分かれている。そのエネルギー差 ΔE は基底状態への状態遷移にともなう光のスペクトルが 589.592nm, 588.995nm の2本に分かれるという形で観測されている。2つのエネルギー準位のエネルギー差を eV 単位で求め、定数 λ_{so} の値を計算せよ。ただし、 $h = 6.6260755 \times 10^{-34} \text{J} \cdot \text{s}$, $1\text{eV} \cong 1.60 \times 10^{-19} \text{J}$, $c \cong 3.0 \times 10^8 \text{m/s}$

(解答例)

1. 粒子の全角運動量は軌道角運動量と固有スピンの和であるから

$$\begin{aligned}\vec{j}^2 &= (\vec{\ell} + \vec{s})^2 = \vec{\ell}^2 + \vec{s}^2 + 2\vec{\ell} \cdot \vec{s}, \\ \vec{\ell} \cdot \vec{s} &= \frac{1}{2}(\vec{j}^2 - \vec{\ell}^2 - \vec{s}^2)\end{aligned}\tag{1}$$

- 2.

$$\begin{aligned}\vec{\ell} \cdot \vec{s} \psi_j &= \frac{\hbar^2}{2} [j(j+1) - \ell(\ell+1) - s(s+1)] \psi_j \\ &= \frac{\hbar^2}{2} \left[j(j+1) - \ell(\ell+1) - \frac{3}{4} \right] \psi_j, (s = 1/2).\end{aligned}\tag{2}$$

3. 題意より

$$\begin{aligned}\Delta E &= \langle \psi_{j=\ell+1/2} | H_{so} | \psi_{j=\ell+1/2} \rangle - \langle \psi_{j=\ell-1/2} | H_{so} | \psi_{j=\ell-1/2} \rangle \\ &= \frac{\lambda_{so}}{2} (2\ell + 1)\end{aligned}\tag{3}$$

4. まずスピン軌道分岐の大きさを光速 c , プランク定数 h と 2 つの波長 $\lambda_1, \lambda_2 (\lambda_1 < \lambda_2)$ により表し、次に具体的な値を代入すると

$$\begin{aligned}
 \Delta E &= \frac{ch}{\lambda_1} - \frac{ch}{\lambda_2} = ch \left(\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1 \lambda_2} \right) \\
 &= 3 \times 10^8 \text{ms}^{-1} \times 6.626 \times 10^{-34} \text{joule} \cdot \text{s} \left(\frac{0.597}{589.592 \times 588.995} \right) \frac{1}{10^{-9} \text{m}} \\
 &= \left(\frac{3 \times 6.626 \times 0.597}{589.592 \times 588.995 \times 1.6} \right) \times 10^{8-34+9+19} \text{eV} \\
 &= 0.002136 \text{eV}.
 \end{aligned} \tag{4}$$

一方、式 (3) の $\ell = 1$ の場合を用いて

$$\begin{aligned}
 \Delta E &= \frac{3\lambda_{\text{so}}}{2} \\
 \rightarrow \lambda_{\text{so}} &= 0.001424 \text{eV}
 \end{aligned} \tag{5}$$

となる。