

一般に、原子の中の電子は原子核のまわりの軌道角運動量とスピン角運動量をもっている。電子は、これらの角運動量に起因する磁気モーメントをもつ。磁気モーメントは、磁石と類似した性質をもち、二つの磁石間の相互ポテンシャルエネルギーが考えられるように、それらの間には相互作用が発生する。この相互作用のハミルトニアン $H_{\text{spin-orbit}}$ は、 λ を適当な定数、軌道角運動量とスピン角運動量を $\vec{\ell}, \vec{s}$ として、近似的に $H_{\text{spin-orbit}} = \lambda \vec{\ell} \cdot \vec{s}$ と表される。

1. 電子の全角運動量 $\vec{j}$ は軌道角運動量 $\vec{\ell}$ とスピン $\vec{s}$ のベクトル和である。このとき、 $\vec{\ell} \cdot \vec{s}$ を求めよ。(ただし、 $\vec{\ell}$ と $\vec{s}$ は交換することを用いよ。)
2. 一般に、 $\vec{j}^2$ の固有状態は $\psi_{j=\ell+1/2}, \psi_{j=\ell-1/2}$ の二つがある。これらの固有状態は、 $\vec{\ell}^2$ の固有状態と $\vec{s}^2$ の固有状態の積の一次結合であるからから、 $\vec{\ell}^2, \vec{s}^2$ の固有状態でもある。この固有状態の場合、 $\vec{\ell} \cdot \vec{s}$ の値を全角運動量 j 、方位量子数 ℓ 、および $\hbar (= h/2\pi$: プランク定数 h) を用いて表せ。
3. スピン軌道相互作用を摂動と考えると、その1次の摂動エネルギーとしてスピン軌道分岐 ΔE を計算せよ。
4. Na原子の(電子の) p 状態 ($\ell = 1$ は二つのエネルギー準位に分かれている。そのエネルギー差 ΔE は基底状態への状態遷移にともなう光のスペクトルが 589.6nm, 589.0nm の2本に分かれるという形で観測されている。2つのエネルギー準位のエネルギー差を eV 単位で求め、定数 λ の値を計算せよ。ただし、 $h = 6.6260755 \times 10^{-34} \text{J} \cdot \text{s}$, $1\text{eV} \cong 1.60 \times 10^{-19} \text{J}$, $c \cong 3.0 \times 10^8 \text{m/s}$

(解答例)

1.

$$\begin{aligned}\vec{j}^2 &= (\vec{\ell} + \vec{s})^2 = \vec{\ell}^2 + \vec{s}^2 + 2\vec{\ell} \cdot \vec{s}, \\ \vec{\ell} \cdot \vec{s} &= \frac{1}{2}(\vec{j}^2 - \vec{\ell}^2 - \vec{s}^2)\end{aligned}\tag{1}$$

2.

$$\begin{aligned}\vec{\ell} \cdot \vec{s} \psi_j &= \frac{\hbar^2}{2}[j(j+1) - \ell(\ell+1) - s(s+1)]\psi_j \\ &= \frac{\hbar^2}{2}[j(j+1) - \ell(\ell+1) - \frac{3}{4}]\psi_j, (s = 1/2).\end{aligned}\tag{2}$$

3.

$$\begin{aligned}\Delta E &= \langle \psi_{j=\ell+1/2} | H_{\text{spin-orbit}} | \psi_{j=\ell+1/2} \rangle - \langle \psi_{j=\ell-1/2} | H_{\text{spin-orbit}} | \psi_{j=\ell-1/2} \rangle \\ &= \frac{\lambda \hbar^2}{2}(2\ell + 1)\end{aligned}\tag{3}$$

4. (自習！)