1. 軌道角運動量演算子 $\hat{\ell}_z, \hat{\boldsymbol{\ell}}^2$ の同時固有状態を $|\ell, m\rangle$ として,次の公式が与えられている。

$$\left\langle \ell m'|\hat{\ell}_z|\ell m \right\rangle = m\,\hbar\delta_{m'm},$$
$$\left\langle \ell m'|\hat{\ell}^2|\ell m \right\rangle = \hbar^2\ell(\ell+1)\delta_{m'm},$$
$$\left\langle \ell m'|\hat{\ell}_\pm|\ell m \right\rangle = \hbar\sqrt{\ell(\ell+1)-m(m\pm1)}\delta_{m'm\pm1}.$$

$\hat{\ell}_\pm \equiv \hat{\ell}_x \pm i\hat{\ell}_y$ である。$\ell=1$ の場合を考え、$m=+1,0,-1$ をもつ状態をそれぞれ 1,2,3 番目の固有状態とする。

$$|1\rangle \equiv |\ell, m=+1\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, |2\rangle \equiv |\ell, m=0\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |3\rangle \equiv |\ell, m=-1\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) 軌道角運動量演算子 $\hat{\ell}_z$ の行列表現(または表現行列)を求めよ。
(b) 軌道角運動量演算子 $\hat{\boldsymbol{\ell}}^2$ の行列表現(または表現行列)を求めよ。
(c) 軌道角運動量演算子 $\hat{\ell}_+$ の行列表現(または表現行列)を求めよ。
(d) 軌道角運動量演算子 $\hat{\ell}_-$ の行列表現(または表現行列)を求めよ。
(e) 軌道角運動量演算子 $\hat{\ell}_x$ の行列表現(または表現行列)を求めよ。
(f) 軌道角運動量演算子 $\hat{\ell}_y$ の行列表現(または表現行列)を求めよ。

2. 以上の結果を用いて、交換関係 $[\hat{\ell}_x, \hat{\ell}_y] = i\hbar\hat{\ell}_z$ を確かめよ。

(解答例)

1(a) 題意より

$$\begin{aligned}
(\hat{\ell}_z)_{11} &\equiv \langle 1|\hat{\ell}_z|1\rangle \equiv \langle \ell=1, m=1|\hat{\ell}_z|\ell=1, m=1\rangle = \hbar, && (1)\\
(\hat{\ell}_z)_{12} &\equiv \langle 1|\hat{\ell}_z|2\rangle \equiv \langle 1,1|\hat{\ell}_z|1,0\rangle = 0, && (2)\\
(\hat{\ell}_z)_{13} &\equiv \langle 1|\hat{\ell}_z|2\rangle \equiv \langle 1,1|\hat{\ell}_z|1,-1\rangle = 0, && (3)\\
(\hat{\ell}_z)_{21} &= (\hat{\ell}_z)_{23} = 0, && (4)\\
(\hat{\ell}_z)_{22} &\equiv \langle 2|\hat{\ell}_z|2\rangle \equiv \langle \ell=1, m=0|\hat{\ell}_z|\ell=1, m=0\rangle = 0, && (5)\\
(\hat{\ell}_z)_{31} &= (\hat{\ell}_z)_{32} = 0, && (6)\\
(\hat{\ell}_z)_{33} &\equiv \langle 3|\hat{\ell}_z|3\rangle \equiv \langle \ell=1, m=-1|\hat{\ell}_z|\ell=1, m=-1\rangle = -\hbar && (7)
\end{aligned}$$

故に、

$$\hat{\ell}_z = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{8}$$

(b) 同様に

$$(\hat{\boldsymbol{\ell}}^2)_{11} = (\hat{\boldsymbol{\ell}}^2)_{22} = (\hat{\boldsymbol{\ell}}^2)_{33} = 2\hbar^2, \tag{9}$$
$$(\hat{\boldsymbol{\ell}}^2)_{12} = (\hat{\boldsymbol{\ell}}^2)_{13} = (\hat{\boldsymbol{\ell}}^2)_{21} = (\hat{\boldsymbol{\ell}}^2)_{23} = (\hat{\boldsymbol{\ell}}^2)_{31} = (\hat{\boldsymbol{\ell}}^2)_{32} = 0. \tag{10}$$

故に、

$$\hat{\boldsymbol{\ell}}^2 = 2\hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{11}$$

(c) 題意より

$$(\hat{\ell}_+)_{11} \equiv \langle 1|\hat{\ell}_+|1\rangle \equiv \langle \ell = 1, m' = 1|\hat{\ell}_+|\ell = 1, m = 1\rangle = 0, \tag{12}$$
$$(\hat{\ell}_+)_{12} \equiv \langle 1|\hat{\ell}_+|2\rangle \equiv \langle 1, 1|\hat{\ell}_+|1, 0\rangle = \hbar\sqrt{1(1+1) - (-0)(-0+1)} = \hbar\sqrt{2}, \tag{13}$$
$$(\hat{\ell}_+)_{13} \equiv 0, \tag{14}$$
$$(\hat{\ell}_+)_{21} \equiv \langle 2|\hat{\ell}_+|1\rangle \equiv \langle 1, 0|\hat{\ell}_+|1, 1\rangle = (\hat{\ell}_+)_{22} = 0, \tag{15}$$
$$(\hat{\ell}_+)_{23} \equiv \langle 1, 0|\hat{\ell}_+|1, -1\rangle = \hbar\sqrt{1(1+1) - (-1)(-1+1)} = \hbar\sqrt{2}, \tag{16}$$
$$(\hat{\ell}_+)_{31} = (\hat{\ell}_+)_{32} = (\hat{\ell}_+)_{33} = 0. \tag{17}$$

故に、

$$\hat{\ell}_+ = \sqrt{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{18}$$

(d) 同様に

$$(\hat{\ell}_-)_{11} \equiv \langle 1|\hat{\ell}_-|1\rangle \equiv \langle 1, 1|\hat{\ell}_-|1, 1\rangle = 0, \tag{19}$$
$$(\hat{\ell}_-)_{12} \equiv (\hat{\ell}_-)_{13} = 0, \tag{20}$$
$$\begin{aligned}(\hat{\ell}_-)_{21} &\equiv \langle 2|\hat{\ell}_-|1\rangle \equiv \langle 1, 0|\hat{\ell}_-|1, 1\rangle = \hbar\sqrt{1(1+1) - 1\cdot(1-1)} \\ &= \hbar\sqrt{2},\end{aligned} \tag{21}$$
$$(\hat{\ell}_-)_{22} \equiv (\hat{\ell}_-)_{23} = (\hat{\ell}_-)_{31} = (\hat{\ell}_-)_{33} = 0, \tag{22}$$
$$\begin{aligned}(\hat{\ell}_-)_{32} &\equiv \langle 3\hat{\ell}_-|2\rangle \equiv \langle 1, -1|\hat{\ell}_-|1, 0\rangle = \hbar\sqrt{1(1+1) - 0\cdot(0-1)} \\ &= \hbar\sqrt{2}.\end{aligned} \tag{23}$$

故に、

$$\hat{\ell}_- = \sqrt{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{24}$$

(e) 以上の結果と $\hat{\ell}_\pm$ の定義を用いて

$$\hat{\ell}_x = \frac{\hat{\ell}_+ + \hat{\ell}_-}{2} = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{25}$$

が得られる。

(f) 同様に

$$\hat{\ell}_y = \frac{\hat{\ell}_+ - \hat{\ell}_-}{2i} = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}. \tag{26}$$

2. 以上の結果を用いて、

$$\begin{aligned}
[\hat{\ell}_x, \hat{\ell}_y] &= \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} - \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{i\hbar^2}{2} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \\
&= i\hbar\hat{\ell}_z.
\end{aligned} \tag{27}$$