（無限量子井戸の中の光の波長）inf-well-ph-lamda050812.tex

幅 L の１次元無限量子井戸の中におかれた質量 m の粒子のとり得るエネルギーは

$$E_n = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}n^2\ ,\ (n = 1, 2, \cdots) \tag{1}$$

のように離散化される。ここでは c は光速,$h, \hbar = h/2\pi$ はプランク定数である。

1. 異なるエネルギー準位間 $(E_{n'}, E_n)$ の遷移の際に放出される光子の波長 $\lambda_{n'n}$ を求めよ。（$\lambda_{n'n}$ を c, m, L, h, n', n で表せ。）
2. 幅 $L = 10^{-10}$m$(= 1\mathring{A})$ の場合、この無限量子井戸の中の電子の n=1,2 を持つ定常状態のとり得るエネルギーはそれぞれ eV になるか計算せよ。
3. 前問と同じ条件の場合、電子が $n' = 2$ から $n = 1$ の状態へ遷移する場合、放射される光子の波長 λ を (m 単位で) 計算せよ。

(解答例)

１．波長 $\lambda_{n'n}$ を持つ光子のエネルギーは $ch/\lambda_{n'n}$ と表され、エネルギーの保存則より

$$E_{n'} - E_n = \frac{ch}{\lambda_{n'n}}$$

となる。したがって

$$\begin{aligned}\lambda_{n'n} &= \frac{ch}{E_{n'} - E_n}\\ &= \frac{8mcL^2}{h(n'^2 - n^2)}\end{aligned}$$

２．

$$E_n = \frac{h^2}{8mL^2}n^2$$

ここで、

$$\begin{aligned}&\frac{h^2}{8mL^2}\\ =\ &\frac{(6.63\times10^{-34}\mathrm{J\cdot s})^2}{8\times0.911\times10^{-30}\ \mathrm{kg}\times(10^{-10}\ \mathrm{m})^2}\\ =\ &\frac{(6.63)^2}{8\times0.911}\times10^{-18}\ \mathrm{J}\ (1\mathrm{J} = 1\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2)\\ =\ &\frac{(6.63)^2}{8\times0.911\times1.6}\times10\ \mathrm{eV}\\ =\ &37.7\ \mathrm{eV}\end{aligned}$$

よって

$$E_1 = 37.7\ \mathrm{eV}\quad ,\quad \mathrm{E}_2 = 150.8\ \mathrm{eV}$$

３．1,2 より

$$\begin{aligned}\frac{ch}{\lambda_{n'n}} &= 150.8\ \mathrm{eV}\ - 37.7\ \mathrm{eV}\ = 113.1\ \mathrm{eV}\\ \Longrightarrow\ \lambda_{n'n} &= \frac{2.997\times10^8\ \mathrm{m/s}\times6.63\times10^{-34}\ \mathrm{J\cdot s}}{113.1\ \mathrm{eV}}\\ &= \frac{2.997\times6.63\times10^{-26}\ \mathrm{J\cdot m}}{113.1\times1.6\times10^{-19}\ \mathrm{J}}\\ &= 1.01\times10^{-8}\ \mathrm{m}\end{aligned}$$