(縮退した2準位系の固有値問題)hamil2x2-degenerate-2-qa060524.tex

固有状態が2つ（$\phi_1(x), \phi_2(x)$）しかない系（2準位系）において、エネルギーが縮退した（エネルギーゼロとする）場合を考える。

1. ハミルトニアン行列が
$$H = \begin{bmatrix} 0 & V \\ V & 0 \end{bmatrix} \tag{1}$$
と表されているとする。ここで $V > 0$ であるとする。すなわち、相互作用は斥力的である。固有値と対応する規格化された固有ベクトルを求めよ。
2. 縮退した2準位系のハミルトニアンの固有値、固有ベクトルの性質についていえることを述べよ。

(解答例)

1. ハミルトニアン行列は

$$\begin{aligned} H &\equiv \begin{pmatrix} 0 & V \\ V & 0 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & +V \\ +V & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad (2) \\ &\rightarrow +Vy = Ex \qquad (3) \\ &\quad\;\; +Vx = Ey \qquad (4) \end{aligned}$$

規格化条件

$$x^2 + y^2 = 1. \tag{5}$$

式 (2) より、自明な解 $(x = y = 0)$ 以外の解が存在するためには

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} E & -V \\ -V & E \end{vmatrix} = E^2 - V^2 \\ E &= \pm V \qquad (E_1 \equiv -V, E_2 \equiv +V) \qquad (6) \end{aligned}$$

式 (6) より、$E = E_1$ に対して式 (3), (4) を考えると

$$\begin{cases} +Vy_1 = (-V)x_1 \\ +Vx_1 = (-V)y_1 \end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} \to x_1 &= -y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} & (8) \\ |\Psi_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} & (9) \end{aligned}$$

$E = E_2(= +V)$ に対しても同様に

$$\begin{cases} +Vy_2 = (+V)x_2 \\ +Vx_2 = (+V)y_2 \end{cases} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} \to x_2 &= y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} & (11) \\ |\Psi_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & (12) \end{aligned}$$

2. 縮退した 2 準位系の固有エネルギーは相互作用により（相互作用の絶対値の 2 倍で）分岐する。
   (a) 相互作用が斥力的な場合には、エネルギーの低い状態の波動関数の成分が <u>逆位相</u> で、エネルギーの高い状態の波動関数の成分が <u>同位相</u> となる。

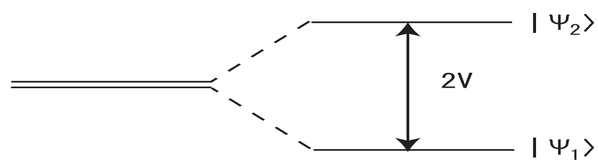

図 1: 縮退した 2 準位系の相互作用によるエネルギー分岐