

固有状態が 2 つ ($\phi_1(x), \phi_2(x)$) しかない系 (2 準位系) において、エネルギーが縮退した (エネルギーゼロとする) 場合を考える。

1. ハミルトニアン行列が

$$H = \begin{bmatrix} 0 & -V \\ -V & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

と表されているとする。ここで $V > 0$ であるとする。すなわち、相互作用は引力的である固有値と対応する規格化された固有ベクトルを求めよ。

2. 縮退した 2 準位系のハミルトニアンの固有値、固有ベクトルの性質についていえることを述べよ。

(解答例)

1. シュレディンガー方程式を

$$H|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle \quad (2)$$

$$|\Psi\rangle = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (3)$$

とおくと

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -V \\ -V & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\rightarrow -Vy = Ex \quad (5)$$

$$-Vx = Ey \quad (6)$$

規格化条件

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (7)$$

式 (4) より、自明な解 ($x = y = 0$) 以外の解が存在するためには、すべての項を右辺または左辺に移動した同次連立方程式の係数を行列要素とする行列の行列式がゼロでなければならない。すなわち、

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} E & V \\ V & E \end{vmatrix} = E^2 - V^2 \\ \rightarrow E &= \pm V \quad (E_1 \equiv -V, E_2 \equiv +V) \end{aligned} \quad (8)$$

式 (8) より、 $E = E_1$ に対して式 (5), (6) を考えると

$$\begin{cases} -Vy_1 = (-V)x_1 \\ -Vx_1 = (-V)y_1 \end{cases} \quad (9)$$

$$\rightarrow x_1 = y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (10)$$

$$|\Psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (11)$$

$E = E_2(= +V)$ に対しても同様に

$$\begin{cases} -V y_2 = (+V) x_2 \\ -V x_2 = (+V) y_2 \end{cases} \quad (12)$$

$$\rightarrow x_2 = -y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (13)$$

$$|\Psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (14)$$

2. 縮退した 2 準位系の固有エネルギーは相互作用により、(相互作用の絶対値の 2 倍で) 分岐する。相互作用が引力的な場合には、エネルギーの低い状態の波動関数の成分は 同位相 で、エネルギーの高い状態の波動関数の成分は 逆位相 となる。

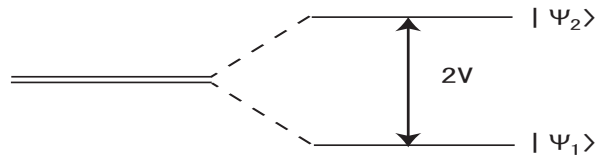


図 1: 縮退した 2 準位系の相互作用によるエネルギー分岐