自由な粒子 (力の働いていない粒子) に対するシュレディンガー方程式を次の手順で導出する。ここで、粒子の質量を m, エネルギーを E、角振動数を ω、波数を k, 運動量を p とする。ただし、h はプランク定数、それを 2π で割ったものを $\hbar$ とする。

a. 光量子に対するアインシュタインの関係式を記せ。
b. 物質粒子に対するド・ブローイの関係式を記せ。
c. 自由な粒子のエネルギーと運動量、質量の関係式を $\hbar, \omega, k, m$ を用いて書きなおせ。
d. x 方向に進行する 1 次元平面波の複素数表現 $\Psi(x,t) = \exp[i(kx-\omega t)]$ に対して、$\frac{\partial \Psi}{\partial t}, \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}$ を計算せよ。
e. 前問 $(c), (d)$ の結果を満たし、条件 1(=線形方程式であること)、条件 2(=p, E など運動に関係する量を含まないこと) を満たすもっとも簡単な微分方程式を記せ。

(解答例)

a. アインシュタインの関係式は $E = \hbar\omega$ である。
b. ド・ブローイの関係式は $p = \hbar k$ である。
c. 自由な粒子のエネルギーと運動量、質量の関係式は

$$E = \frac{p^2}{2m} \rightarrow \hbar\omega = \frac{(\hbar k)^2}{2m} \tag{1}$$

と書きなおせる。

d. 題意より

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -i\omega \exp[i(kx-\omega t)] = -i\omega\Psi, \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = -k^2 \exp[i(kx-\omega t)] = -k^2\Psi. \tag{3}$$

が得られる。

e. 式（1）の両辺に Ψ を右からかけて、前問 (c),(d) の結果を代入すると

$$i\hbar\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \tag{4}$$

であること (自由粒子に対する時間に依存するシュレディンガー方程式) がわかる。