

[偶パリティ状態と奇パリティ状態]

1次元で、ポテンシャル $V(x)$ が偶関数 $V(x) = V(-x)$ ならばシュレディンガー方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x) \quad (1)$$

の固有関数は必ず、偶関数 (偶パリティ) または、奇関数 (奇パリティ) にとりうることを示せ。

(解答例)

(1) より、 $x \rightarrow -x$ とおくと

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(-x) + V(x)\psi(-x) = E\psi(-x) \quad (2)$$

(1), (2) を比較すると $\psi(x)$ が固有関数であれば $\psi(-x)$ も同じエネルギー固有値 E を持つ固有関数となることが分かる (A)。もし、エネルギー固有値 E の固有状態が縮退していないならば $\psi(x)$ と $\psi(-x)$ は比例係数のみが異なることになる。すなわち

$$\psi(x) = \varepsilon \psi(-x) \quad \varepsilon : \text{定数} \quad (3)$$

(3) において、 $x \rightarrow -x$ と置いて、再び (3) を用いると

$$\begin{aligned} \psi(-x) &= \varepsilon \psi(x) = \varepsilon^2 \psi(-x) \\ \rightarrow \psi(x) &= \varepsilon^2 \psi(x) \quad \text{つまり } \varepsilon = \pm 1 \end{aligned} \quad (4)$$

すなわち

$$\left. \begin{aligned} \psi(x) &= \psi(-x) && \text{偶パリティ状態} \\ \psi(x) &= -\psi(-x) && \text{奇パリティ状態} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

である (B)。もし、エネルギーが縮退していれば固有関数は偶、奇パリティ状態いずれでもないものを使用してもよい。

ところで、 $\psi_0(x)$ と $\psi_e(x)$ を

$$\psi_0(x) = [\psi(x) + \psi(-x)]/2, \quad \psi_e(x) = [\psi(x) - \psi(-x)]/2 \quad (6)$$

と定義すると、 $\psi_0(x)$ は偶関数 $\psi_e(x)$ は奇関数である。(1), (2) より $\psi_0(x)$ 、 $\psi_e(x)$ も同じ E をエネルギー固有値として持つ固有関数であることが分かる。したがって、縮退した状態でも、奇関数でも偶関数でもない $\psi(x)$ が求まった場合 (6) のようにして波動関数を選び直すと固有関数は偶関数または奇関数にとり得ることが分かる。