座標 $\hat{x}$ とその正準共役運動量 $\hat{p}_x$ は正準交換関係

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar \tag{1}$$

を満たす。ただし、プランク定数（を 2π で割ったもの）を $\hbar$ とする。

1. （通常の座標表示で）演算子 $\hat{x}, \hat{p}_x$ を具体的に表せ。
2. 正準交換関係を証明せよ。

(解答例)

1.

$$\hat{x} = x, \tag{2}$$
$$\hat{p}_x = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x} \tag{3}$$

2. $\psi(x)$ を任意の波動関数とする。交換関係の定義より

$$[\hat{x}, \hat{p}_x]\psi(x) = \hat{x}\hat{p}_x\psi(x) - \hat{p}_x\hat{x}\psi(x). \tag{4}$$

ここで、第 1 項、2 項を関数の積の微分に注意しながら、それぞれ計算すると

$$\hat{x}\hat{p}_x\psi(x) = \hat{x}\{\hat{p}_x\psi(x)\} = \frac{\hbar}{i}x\frac{\partial\psi(x)}{\partial x}, \tag{5}$$
$$\hat{p}_x\{x\psi(x)\} = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\{x\psi(x)\} = \frac{\hbar}{i}\psi(x) + \frac{\hbar}{i}x\frac{\partial\psi(x)}{\partial x} \tag{6}$$

が得られる。これらの結果 (5,6) を式 (4) 代入すると

$$[\hat{x}, \hat{p}_x]\psi(x) = i\hbar\psi(x). \tag{7}$$

ここで $\psi(x)$ は任意であるから、式（1）が成立する。