

3次元系における角運動量演算子についての次の問いに答えよ。ただし、プランク定数を $\hbar, \hbar \equiv h/(2\pi)$ とし、座標と運動量演算子の間には次の正準交換関係が成立するとせよ。

$$[x, p_x] = i\hbar, [y, p_y] = i\hbar, [z, p_z] = i\hbar, \quad (1)$$

$$[x, x] = [x, y] = [x, z] = [x, p_y] = [x, p_z] = 0, \quad (2)$$

$$[y, y] = [y, z] = [y, p_x] = [y, p_z] = [z, p_x] = [z, p_y] = 0. \quad (3)$$

1. 角運動量演算子（の直交直線座標表示）の x, y, z 成分 ℓ_x, ℓ_y, ℓ_z を記せ。
2. 角運動量演算子の間の交換関係 $[\ell_x, \ell_y] = i\hbar\ell_z, [\ell_y, \ell_z] = i\hbar\ell_x, [\ell_z, \ell_x] = i\hbar\ell_y$ を用いて、角運動量 2 乗演算子との交換関係 $[\ell^2, \ell_x], [\ell^2, \ell_y], [\ell^2, \ell_z]$ を求め、その結果の意味を述べよ。ただし、 $\ell^2 \equiv \ell_x^2 + \ell_y^2 + \ell_z^2$ である。

（解答例）

1. 運動量演算子（の直交直線座標表示）の x, y, z 成分 p_x, p_y, p_z は

$$p_x = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}, p_y = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial y}, p_z = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial z} \quad (4)$$

と表される。角運動量演算子（の直交直線座標表示）の x, y, z 成分 ℓ_x, ℓ_y, ℓ_z は

$$\ell_x = yp_z - zp_y = \frac{\hbar}{i} \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad (5)$$

$$\ell_y = zp_x - xp_z = \frac{\hbar}{i} \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad (6)$$

$$\ell_z = xp_y - yp_x = \frac{\hbar}{i} \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right). \quad (7)$$

2. まず、角運動量 2 乗演算子との交換関係

$$[\ell^2, \ell_x] = [\ell_x^2 + \ell_y^2 + \ell_z^2, \ell_x] = [\ell_x^2, \ell_x] + [\ell_y^2, \ell_x] + [\ell_z^2, \ell_x] \quad (8)$$

となる。ここで、

$$[\ell_x^2, \ell_x] = \ell_x^3 - \ell_x^3 = 0, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} [\ell_y^2, \ell_x] &= \ell_y^2 \ell_x - \ell_x \ell_y^2 = \ell_y (\ell_y \ell_x - \ell_x \ell_y) + (\ell_y \ell_x - \ell_x \ell_y) \ell_y \\ &= -i\hbar (\ell_y \ell_z + \ell_z \ell_y), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} [\ell_z^2, \ell_x] &= \ell_z^2 \ell_x - \ell_x \ell_z^2 = \ell_z (\ell_z \ell_x - \ell_x \ell_z) + (\ell_z \ell_x - \ell_x \ell_z) \ell_z \\ &= i\hbar (\ell_y \ell_z + \ell_z \ell_y) \end{aligned} \quad (11)$$

となるので

$$[\ell^2, \ell_x] = 0 \quad (12)$$

となる。他も同様にして、 $[\ell^2, \ell_y] = [\ell^2, \ell_z] = 0$ となる。このように、角運動量 2 乗演算子と三つの角運動量演算子のそれぞれとは交換するので、同時固有状態は存在する。ただし、三つの角運動量演算子はお互いには交換しないので、角運動量演算子の二つの成分間には同時固有関数は存在しない。以上のことから、角運動量 2 乗演算子 ℓ^2 と角運動量演算子の成分のひとつを任意に選ぶと同時固有関数が存在する。通常は角運動量演算子の任意の成分として z 成分、 ℓ_z を選ぶ。