

(3次元系における角運動量演算子 1:angularmomentum-3D1qa-100803b.tex)

3次元系における角運動量演算子についての次の問いに答えよ。

1. 角運動量演算子 (の直交直線座標表示) の x, y, z 成分、 ℓ_x, ℓ_y, ℓ_z を x, y, z, p_x, p_y, p_z のいくつかを用いて表わせ。
2. 角運動量演算子の間の交換関係 $[\ell_x, \ell_y] = i\hbar\ell_z$ を証明せよ。

ただし、プランク定数を h , ディラック定数を $\hbar \equiv h/(2\pi)$ とし、座標演算子と運動量演算子の間には次の正準交換関係が成立する。

$$[x, p_x] = i\hbar, [y, p_y] = i\hbar, [z, p_z] = i\hbar, \quad (1)$$

$$[x, x] = [x, y] = [x, z] = [x, p_y] = [x, p_z] = 0, \quad (2)$$

$$[y, y] = [y, z] = [y, p_x] = [y, p_z] = [z, p_x] = [z, p_y] = 0. \quad (3)$$

ただし、演算子 A, B に対して、交換関係は $[A, B] \equiv AB - BA$ と定義される。以上の諸式をまとめると、同じ成分の座標演算子と運動量演算子の間では交換関係が成立し、それ以外の演算子間では積の順番を変えてもよい。

(ヒント) 演算子 A, B, C, D に対して、次の公式を用いよ。

$$[AB, CD] = ABCD - CDAB, \quad (4)$$

$$[A, C - D] = [A, C] - [A, D], \quad (5)$$

$$\begin{aligned} [A - B, C - D] &= [A, C - D] - [B, C - D] \\ &= [A, C] - [A, D] - [B, C] + [B, D]. \end{aligned} \quad (6)$$

(解答例)

1. 角運動量演算子の x, y, z 成分 ℓ_x, ℓ_y, ℓ_z は次のように表される。

$$\ell_x = yp_z - zp_y, \quad \ell_y = zp_x - xp_z, \quad \ell_z = xp_y - yp_x. \quad (7)$$

2. 前問の結果を用いて、角運動量演算子の成分間の交換関係を計算する。

$$\begin{aligned} [\ell_x, \ell_y] &= [yp_z - zp_y, zp_x - xp_z] \\ &= [yp_z, zp_x] - [yp_z, xp_z] - [zp_y, zp_x] + [zp_y, xp_z], \\ &= yp_z zp_x - zp_x yp_z - (yp_z xp_z - xp_z yp_z) - (zp_y zp_x - zp_x zp_y) \\ &\quad + (zp_y xp_z - xp_z zp_y) \\ &= p_z z \cdot yp_x - zp_z \cdot p_x y - xyp_z^2 + xyp_z^2 - z^2 p_x p_y + z^2 p_x p_y \\ &\quad + zp_z \cdot xp_y - p_z z \cdot xp_y \\ &= (p_z z - zp_z)yp_x + (zp_z - p_z z)xp_y \\ &= -[z, p_z]yp_x + [z, p_z]xp_y \\ &= i\hbar(xp_y - yp_x) \\ \rightarrow [\ell_x, \ell_y] &= i\hbar\ell_z. \end{aligned} \quad (8)$$

(備考：同様にして、 $[\ell_y, \ell_z] = i\hbar\ell_x$, $[\ell_z, \ell_x] = i\hbar\ell_y$ も証明できる。角運動量演算子間の交換関係は以下のように、非常に重要な関係式である。すなわち、相互作用の有無にかかわらず、三つの角運動量演算子はお互いに交換しないので、同時には固有状態は存在しないことを意味する。また、角運動量演算子間の交換関係より、角運動量演算子の行列要素も計算される。類似の性質がスピン演算子間にも成立する。)