一般化角運動量と角運動量の合成

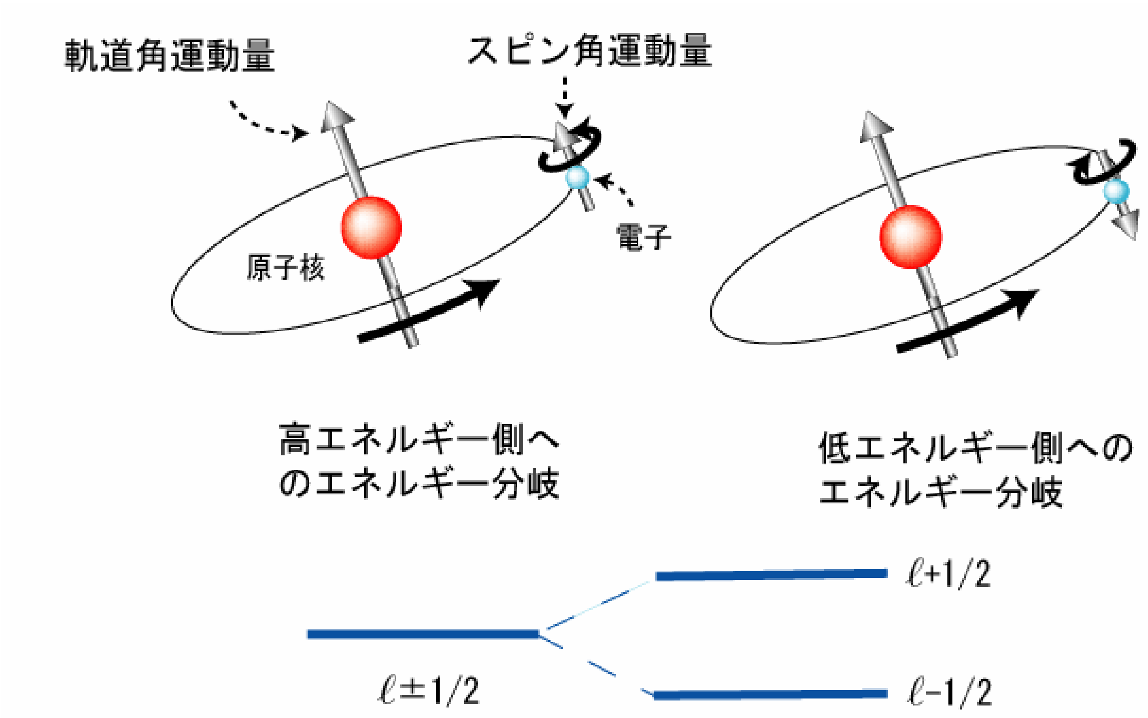
軌道角運動量演算子の数学的性質は、その間の交換関係により決まる。

軌道角運動量演算子の交換関係を基礎にして、
角運動量の概念を一般化できる。

一粒子のスピン軌道結合効果、多粒子系の全角運動量とそれに関連した物理的性質を定量的に議論するには
一般化角運動量を合成する必要がある。

Made by R. Okamoto (Kyushu Institute of Technology)
filename=angularmom-coupling080611.ppt

電子における軌道角運動量とスピン角運動量の結合



一般の角運動量とその性質

$$\hat{\vec{j}} \equiv (\hat{j}_x, \hat{j}_y, \hat{j}_z),$$

$$\hat{\vec{j}}^2 \equiv \left(\hat{j}_x\right)^2 + \left(\hat{j}_y\right)^2 + \left(\hat{j}_z\right)^2,$$

$$\hat{j}_\pm \equiv \hat{j}_x \pm \mathrm{i}\,\hat{j}_y \rightarrow \hat{\vec{j}}^2 = \hat{j}_+\hat{j}_- + \left(\hat{j}_z\right)^2 - \hat{j}_z$$

$$\left[\hat{j}_x, \hat{j}_y\right] = \mathrm{i}\,\hbar\hat{j}_z,\ \left[\hat{j}_y, \hat{j}_z\right] = \mathrm{i}\,\hbar\hat{j}_x,\ \left[\hat{j}_z, \hat{j}_x\right] = \mathrm{i}\,\hbar\hat{j}_y,$$

$$\left[\hat{\vec{j}}^2, \hat{j}_x\right] = \left[\hat{\vec{j}}^2, \hat{j}_y\right] = \left[\hat{\vec{j}}^2, \hat{j}_z\right] = 0,$$

$$\rightarrow \left[\hat{j}_z, \hat{j}_\pm\right] = \pm\hbar\,\hat{j}_\pm, \left[\hat{j}_+, \hat{j}_-\right] = 2\hbar\,\hat{j}_z$$

一般の角運動量演算子の固有値と固有関数(固有状態）

$$\hat{\vec{j}}^2 \left| j\,m \right\rangle = \hbar^2 j(j+1) \left| j\,m \right\rangle,$$

$$\hat{j}_z \left| j\,m \right\rangle = \hbar\,m \left| j\,m \right\rangle,$$

$$\hat{j}_\pm \left| j\,m \right\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m\pm1)} \left| j\,m\pm1 \right\rangle,$$

$$\left\langle j'm' \middle| jm \right\rangle = \delta_{jj'} \cdot \delta_{mm'}$$

$$j = 0,1,2,\cdots(\text{or } 1/2, 3/2, \cdots),$$

$$m = -j, -j+1, \cdots, j-1, j \quad (j\text{の各値につき})$$

$$\left| \ell m \right\rangle \Leftrightarrow Y_{\ell m}(\theta,\phi): \text{球面調和関数}$$

$$\left\langle \ell' m' \middle| \ell m \right\rangle \Leftrightarrow \int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} Y^*_{\ell' m'}(\theta,\phi) Y_{\ell m}(\theta,\phi) \sin\theta\, d\theta\, d\phi$$

一般の角運動量演算子の行列表現

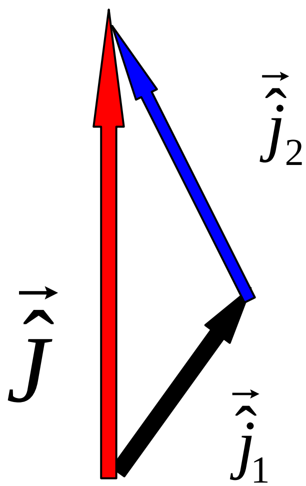
$$\left\langle j'm' \middle| \hat{j}_z \middle| j\,m \right\rangle = \hbar\,m\,\delta_{jj'}\delta_{mm'},$$

$$\left\langle j'm' \middle| \hat{\vec{j}}^2 \middle| jm \right\rangle = \hbar^2\ j(j+1)\delta_{jj'}\delta_{mm'},$$

$$\left\langle j'm' \middle| \hat{j}_\pm \middle| j\,m \right\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m\pm1)}\,\delta_{jj'}\delta_{m',m\pm1}$$

角運動量の合成(1);ベクトル模型

可換な角運動量演算子 $\left[\vec{\hat{j}}_1, \vec{\hat{j}}_2\right] = 0 \quad \left(\left[\hat{j}_a, \hat{j}_b\right] = 0, \{a,b\} = x, y, z\right)$



角運動量の和の演算子

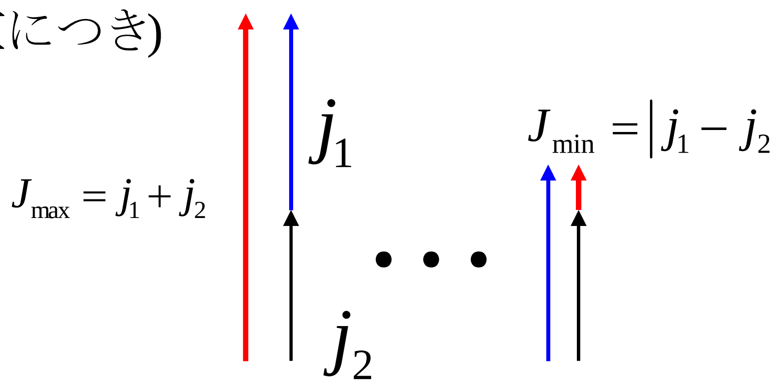
$$\vec{\hat{J}} \equiv \vec{\hat{j}}_1 + \vec{\hat{j}}_2 \rightleftarrows \vec{\hat{J}} = \left(\hat{J}_x, \hat{J}_y, \hat{J}_z\right) = \left(\hat{j}_{1x} + \hat{j}_{2x}, \hat{j}_{1y} + \hat{j}_{2y}, \hat{j}_{1z} + \hat{j}_{2z}\right)$$

$\vec{\hat{J}}^2 \left(\equiv \hat{J}_x{}^2 + \hat{J}_y{}^2 + \hat{J}_z{}^2\right)$ の固有値 $\hbar^2 J(J+1)$

$$J = j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1, \cdots, \left|j_1 - j_2\right|$$

$\hat{J}_z$ の固有値 $\hbar M$

$$M = -J, -J+1, \cdots, J-1, J \quad (J\text{の各値につき})$$



角運動量の合成（2）;Clebsch-Gordan係数

$\hat{\vec{j}}_1^{\,2}, \hat{j}_{1z}$の同時固有関数(状態)：$|\, j_1\, m_1 \rangle$

$\hat{\vec{j}}_2^{\,2}, \hat{j}_{2z}$の同時固有関数(状態)：$|\, j_2\, m_2 \rangle$

$\hat{\vec{J}}^{\,2}, \hat{J}_z$の同時固有関数(状態)：$|\, JM \rangle$

$$|\, JM \rangle = \sum_{m_1, m_2} \langle\, j_1\, m_1\; j_2\, m_2 \,|\, JM \rangle |\, j_1\, m_1 \rangle |\, j_2\, m_2 \rangle$$

$\langle\, j_1\, m_1\; j_2\, m_2 \,|\, JM \rangle$ Clebsch-Gordan係数

$\longrightarrow$ $|\langle\, j_1\, m_1\; j_2\, m_2 \,|\, JM \rangle|^2$: 状態$|\, JM \rangle$の中の状態$|\, j_1\, m_1 \rangle$と$|\, j_2\, m_2 \rangle$の相対的確率

クレブシュ・ゴルダン係数の性質

三角条件

$$\langle j_1\, m_1\ j_2\, m_2 \mid JM \rangle = 0 \quad \text{for } m_1 + m_2 \neq M,$$

$$\langle j_1\, m_1\ j_2\, m_2 \mid JM \rangle = 0 \quad \text{for } j_1 + j_2 < J, \left| j_1 - j_2 \right| > J$$

直交規格性

$$\sum_{m_1, m_2} \langle j_1\, m_1\ j_2\, m_2 \mid JM \rangle \langle j_1\, m_1\ j_2\, m_2 \mid J'M' \rangle = \delta_{JJ'} \cdot \delta_{MM'},$$

$$\sum_{J} \langle j_1\, m_1\ j_2\, m_2 \mid JM \rangle \langle j_1\, m_1'\ j_2\, m_2' \mid JM \rangle = \delta_{m_1 m_1'} \cdot \delta_{m_2 m_2'}$$

対称性

$$\begin{aligned}
\langle j_1\, m_1\ j_2\, m_2 \mid JM \rangle &= (-1)^{j_1 + j_2 - J} \langle j_2\, m_2\ j_1\, m_1 \mid JM \rangle \\
&= (-1)^{j_1 + j_2 - J} \langle j_1\ -m_1\ j_2\ -m_2 \mid J\ -M \rangle \\
&= (-1)^{j_1 - m_1} \sqrt{\frac{2J+1}{2j_1+1}} \langle j_1\, m_1\ J\ -M \mid j_2\ -m_2 \rangle \\
&= (-1)^{j_2 + m_2} \sqrt{\frac{2J+1}{2j_2+1}} \langle J\ -M\ \ j_2\, m_2 \mid j_1\ -m_1 \rangle
\end{aligned}$$

Clebsch-Gordan係数の具体例

2つのスピン角運動量(S=1/2)の合成の場合

$$\langle 1/2\quad 1/2\quad 1/2\quad 1/2|1\quad 1\rangle = 1,$$

$$\langle 1/2 -1/2\quad 1/2 -1/2|1\ -1\rangle = 1,$$

$$\langle 1/2\quad 1/2\quad 1/2 -1/2|0\quad 0\rangle = 1/\sqrt{2},$$

$$\langle 1/2 -1/2\quad 1/2\quad 1/2|0\quad 0\rangle = -1/\sqrt{2},$$

$$\langle 1/2\quad 1/2\quad 1/2 -1/2|1\quad 0\rangle = 1/\sqrt{2},$$

$$\langle 1/2 -1/2\quad 1/2\quad 1/2|1\quad 0\rangle = 1/\sqrt{2}$$

スピン角運動量(s=1/2)と軌道角運動量ℓの合成

$$\langle \ell\, m_\ell, 1/2\quad 1/2\,|\,\ell+1/2, m\rangle = \sqrt{\frac{\ell+m+1/2}{2\ell+1}}, (m = m_\ell + 1/2),$$

$$\langle \ell\, m_\ell, 1/2 -1/2\,|\,\ell+1/2, m\rangle = \sqrt{\frac{\ell-m+1/2}{2\ell+1}}, (m = m_\ell - 1/2),$$

$$\langle \ell\, m_\ell, 1/2\quad 1/2\,|\,\ell-1/2, m\rangle = -\sqrt{\frac{\ell-m+1/2}{2\ell+1}}, (m = m_\ell + 1/2),$$

$$\langle \ell\, m_\ell, 1/2\quad 1/2\,|\,\ell-1/2, m\rangle = \sqrt{\frac{\ell+m+1/2}{2\ell+1}}, (m = m_\ell - 1/2)$$

参考文献

M.E.ローズ「角運動量の基礎理論」(みすず書房)、1974年

Edmonds, *Angular Momentum in Quantum Mechanics*

D. A. Varshalovich, A. N. Moskalev, V. K. Khersonskii,
Quantum Theory of Angular Momentum (World Scientific)、1988