

xy 面上の運動を考える。古典力学における角運動量の z 成分は運動量 (p_x, p_y) を用いて $\ell_z = xp_y - yp_x$ のように与えられる。角運動量の演算子についての次の問いに答えよ。

1. 運動量演算子を用いて角運動量演算子の z 成分を記せ。
2. 極座標 (r, ϕ) と直交直線座標の関係、 $x = r \cos \phi, y = r \sin \phi$ を用いて、次の偏微分係数を導け。

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos \phi, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \sin \phi, \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\sin \phi}{r}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\cos \phi}{r}. \quad (1)$$

3. 前問の結果を用いて、次の式を導け。

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos \phi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \phi}{r} \frac{\partial}{\partial \phi}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \sin \phi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \phi}{r} \frac{\partial}{\partial \phi}. \quad (2)$$

4. 角運動量演算子の z 成分 ℓ_z の極座標表示が次のようになることを示せ。

$$\hat{\ell}_z = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (3)$$

5. 角運動量演算子の z 成分 $\hat{\ell}_z$ の固有値方程式の一般解、規格化定数を求めよ。
6. 固有関数の角度変数についての一価性より、角運動量は $\hbar$ を単位とする離散的 (不連続的) な値しか取れないことを示せ。

(解答例)

1. 運動量演算子を用いて角運動量演算子の z 成分は次のようになる。

$$\hat{\ell}_z = \frac{\hbar}{i} \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right). \quad (4)$$

2. 極座標と直交直線座標の関係より

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \tan \phi = \frac{y}{x}, (0 \leq r < \infty, 0 \leq \phi \leq 2\pi). \quad (5)$$

これらの関係を用いて偏微分係数の計算を行って次の関係が得られる。

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}-1} \times 2x = \frac{x}{r} = \cos \phi \quad (6)$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}-1} \times 2y = \frac{y}{r} = \sin \phi. \quad (7)$$

3. 極座標と直交直線座標の関係を用いて

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \tan \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{d \tan \phi}{d \phi} \rightarrow -\frac{y}{x^2} = \frac{1}{\cos^2 \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\sin \phi}{r} \quad (8)$$

$$\frac{\partial \tan \phi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{d \tan \phi}{d \phi} \rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{\cos^2 \phi} \frac{\partial \phi}{\partial y} \rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\cos \phi}{r} \quad (9)$$

4. 極座標と直交直線座標の関係を用いて

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \phi} = \cos \phi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \phi}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (10)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \phi} = \sin \phi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \phi}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (11)$$

5. 以上の結果より

$$\begin{aligned} \hat{\ell}_z &= \frac{\hbar}{i} \left[r \cos \phi \left(\sin \phi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \phi}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) - r \sin \phi \left(\cos \phi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \phi}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \right] \\ &= \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \phi}. \end{aligned} \quad (12)$$

6. 題意より

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Phi(\phi)}{\partial \phi} = \alpha \Phi(\phi). \quad (13)$$

指数関数の性質を考えると、この微分方程式の一般解は

$$\Phi(\phi) = N \exp(i \frac{\alpha \phi}{\hbar}), (N : \text{規格化定数}) \quad (14)$$

となる。固有関数の規格化を行うことにより規格化定数を決める。

$$1 = \int_0^{2\pi} |\Phi(\phi)|^2 d\phi = N^2 \int_0^{2\pi} d\phi \quad (15)$$

$$\rightarrow N = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad (16)$$

7. 題意より

$$\Phi(\phi + 2\pi) = \Phi(\phi) \rightarrow 1 = \exp(i \frac{2\pi \alpha}{\hbar}) \quad (17)$$

$$\rightarrow \frac{\alpha}{\hbar} = m, (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (18)$$

結果をまとめると、

$$\Phi_m(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(im\phi), (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (19)$$

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Phi_m(\phi)}{\partial \phi} = m\hbar \Phi_m(\phi). \quad (20)$$

角運動量は $\hbar$ を単位とする離散的な値しか許されないことになる。(角運動量の量子化)