質量 m の（量子的）粒子が長さ L の直線上に束縛されているだけで、力が働いていないとする。(1次元量子箱)。粒子の位置と運動量についての不確定性関係を適用して、ここの粒子の取りうるエネルギー E の最小値をもとめ、量子的な粒子は静止できるかどうかを述べよ。ただし、プランク定数を $h, \hbar \equiv h/2\pi$ とする。

(解答例)
量子的な粒子は与えられた線分のどこかに存在するのだから、その位置の不確定性 Δx は L よりも大きくない。もし、$\Delta x = L$ と置けば、位置と運動量についての不確定性関係 $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$ より、運動量の不確定性 Δp が生じる。題意より、可能なエネルギーの最小値を求めようとしているのだから、

$$\begin{aligned} E &= \frac{(\Delta p)^2}{2m} \\ &\geq \frac{(\hbar/2L)^2}{2m} \\ \to E &\geq \frac{\hbar^2}{8mL^2}. \end{aligned} \tag{1}$$

すなわち、最小エネルギーはゼロではなく、有限なので、量子的粒子は静止することは不可能であることを意味する。

(備考:この種の定性的な議論においては、位置と運動量についての不確定性関係は $\Delta x \Delta p \cong h$, $\Delta x \Delta p \cong \hbar$ としてもよい。)