

質量 m の (量子的) 粒子の位置の不確定性を Δx 、運動量の不確定性を Δp 、プランク定数を $h, \hbar \equiv h/2\pi$ とする。特殊相対性理論によれば、粒子の速度は光速 ($c \cong 3.0 \times 10^8 \text{m/s}$) を越えることはできない。必要な場合、 $\hbar \cong 1.05 \times 10^{-34} \text{J} \cdot \text{s}$ 、電子質量 $m_e \cong 0.911 \times 10^{-30} \text{kg}$ という近似値を用いてよい。

1. この粒子の位置と運動量についての不確定性関係を記せ。
2. この運動量の不確定性に相当する速さ v を記せ。
3. この粒子が電子であるとして、原子の「大きさ」である $1\text{\AA} \equiv 10^{-10} \text{m}$ 以内の領域に存在できるかどうかを調べよ。
4. 前問と同様に、電子が、「大きさ」が $10\text{fm} = 10^{-14} \text{m}$ 程度である原子核の内部に存在できるかどうかを調べよ。(fm はフェムトメートル (femt meter) のこと。)

(解答例)

1. 題意より $\Delta x \Delta p \cong \hbar$.
2. 題意より、 $\Delta p = mv$ と置き、位置と運動量についての不確定性関係を用いると $v \cong \hbar/(m\Delta x)$ となる。
3. 電子の位置の不確定性 Δx として原子の「大きさ」を用いると、電子の速さ v は

$$\begin{aligned} v &\cong \frac{1.05 \times 10^{-34} \text{J} \cdot \text{s}}{(0.911 \times 10^{-30} \text{kg}) \times (10^{-10} \text{m})} \\ &\cong \frac{1.05}{0.91} \times 10^{-34+30+10} \times \frac{\text{J} \cdot \text{s}}{\text{kg} \cdot \text{m}} \\ &\cong 10^6 \text{m/s} \end{aligned} \quad (1)$$

となる。これは巨視的な経験からは、想像を絶するような超高速であるが、光速 ($c \cong 3.0 \times 10^8 \text{m/s}$) 以下であるから原理的に可能である。したがって、原子程度の空間的領域内に電子は存在できることになる。

4. 他方、電子の位置の不確定性 Δx として原子核の「大きさ」を用いると、電子の速さ v は、同様にして、

$$\begin{aligned} v &\cong \frac{1.05 \times 10^{-34} \text{J} \cdot \text{s}}{(0.911 \times 10^{-30} \text{kg}) \times (10^{-14} \text{m})} \\ &\cong \frac{1.05}{0.91} \times 10^{-34+30+14} \times \frac{\text{J} \cdot \text{s}}{\text{kg} \cdot \text{m}} \\ &\cong 10^{10} \text{m/s} \end{aligned} \quad (2)$$

となる。これは光速をはるかに越えているので、原理的に不可能である。したがって、原子核内に電子は存在できない。

(備考：原子核の放射性崩壊の一種である、ベータ崩壊の際には、高エネルギーの電子が放出されることが知られている。)