力が働く粒子に対するシュレーディンガー方程式を次の手順で導出する。ここで、粒子の質量を m, 運動エネルギーを まずE、角振動数を ω、波数を k, 運動量を p とする。ただし、h はプランク定数、それを 2π で割ったものを $\hbar$ とする。

1. 光量子に対するアインシュタインの関係式を記せ。
2. 物質粒子に対するド・ブローイの関係式を記せ。
3. この粒子の運動エネルギーと運動量、質量の関係式を $\hbar, \omega, k, m$ を用いて書きなおせ。
4. x 方向に進行する 1 次元平面波の複素数表現 $\Psi(x,t) = \exp[i(kx-\omega t)]$ に対して、$\frac{\partial\Psi}{\partial t}, \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}$ を計算せよ。
5. 直前の二つの問の結果を満たし、条件 1(=線形方程式であること)、条件 2(=p, E など運動に関係する量を含まないこと) を満たすもっとも簡単な微分方程式を記せ。
6. ニュートン力学において、全エネルギーが（運動エネルギー＋ポテンシャル）であることから類推して、前問の結果における運動エネルギー演算子を、一般には粒子の位置と時間に依存するポテンシャル $V(x,t)$ を含む、全エネルギーに対応する演算子 $\hat{H} = -\hbar^2/(2m)\partial^2/\partial x^2 + V(x,t)$ で置き換えることにより、力が働く粒子に対するシュレーディンガー方程式を導け。

(解答例)

1. アインシュタインの関係式は $E = \hbar\omega$ である。
2. ド・ブローイの関係式は $p = \hbar k$ である。
3. 自由な粒子のエネルギーと運動量、質量の関係式は

$$E = \frac{p^2}{2m} \to \hbar\omega = \frac{(\hbar k)^2}{2m} \tag{1}$$

4. 題意より

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -i\omega\exp[i(kx-\omega t)] = -i\omega\Psi, \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = -k^2\exp[i(kx-\omega t)] = -k^2\Psi. \tag{3}$$

5. 式（1）の両辺に Ψ を右からかけ、前二つの問の結果を代入すると

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}. \tag{4}$$

6. 前問の結果は力が働かない場合の方程式であるが、力が働く一般の場合の特殊な場合に相当すると見なし、前問の結果における運動エネルギー演算子を全エネルギーに対応する演算子 (ハミルトニアン) に置き換えると

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x,t)\right)\Psi. \tag{5}$$