（物質波の定常波条件とド･ブローイの関係を用いた無限量子井戸系の解法）filenname=quantum-well-infinite-de-Broglie-qa090523.tex

幅 L の１次元無限量子井戸の中におかれた質量 m の粒子のとり得るエネルギーをド・ブローイの物質波の考えを用いて導いてみよう。ド・ブローイは運動量 p を持つ粒子にはある波長の物質波というものが伴うと仮定した。

1. 波長 λ の物質波が幅 L の中で定常波（定在波）となる条件を整数 n を用いて記せ。
2. 物質波の波長と粒子の運動量 p の関係を記せ。ただし、プランク定数として $\hbar = h/2\pi$ を用いよ。
3. 以上の結果とエネルギー E を質量と運動量で表す式を用いて、粒子のエネルギーが量子化されることを示せ。
4. プランク定数 $\hbar = h/2\pi$ と光速 c などと, それらの組み合わせを用いて、最低エネルギーを計算せよ。ただし、電子が水素原子の平均半径の約 2 倍の幅 $L = 1.0\mathrm{A}$ の無限量子井戸内に閉じ込められるして $c\hbar \cong 1977\mathrm{eV}\cdot\mathrm{A}$, $mc^2 \cong 0.5\times 10^6\mathrm{eV}$ とする。（ここで、eV は電子ボルトという微視的世界の典型的なエネルギーの単位で $1\mathrm{eV} \cong 1.60\times 10^{-19}\mathrm{J}$ であり、同じく A は $\mathrm{A} = 10^{-10}\mathrm{m}$ である。）（ヒント：エネルギーの式の分母分子に c^2 を書けよ。）

(解答例)

1. 題意より、物質波の波長 λ の半分の整数倍が幅 L に等しい条件は次のようになる。

$$L = \frac{\lambda}{2}\times n. \ (n = 1, 2, \cdots) \tag{1}$$

2. 物質波の波長と粒子の運動量 p についてのド・ブローイの関係は $\lambda = 2\pi\hbar/p$ である。
3. 題意より、粒子のエネルギーの式に前問までの結果を代入すると

$$\begin{aligned} E &= \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2m}\left(\frac{2\pi\hbar}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{2m}\left(\pi\frac{\hbar n}{L}\right)^2 \\ \to E_n &\equiv \left(\frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}\right)n^2 \ , \ (n = 1, 2, \cdots). \end{aligned} \tag{2}$$

4. 題意より

$$\begin{aligned} E_{n=1} &= \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2} = \frac{\pi^2(c\hbar)^2}{2(mc^2)L^2} \\ &= \frac{9.87\times(1977\mathrm{eV}\cdot\mathrm{A})^2}{2\times(0.5\times 10^6\mathrm{eV})\times(1.0\mathrm{A})^2} \\ \to E_{n=1} &\approx 38 \ \mathrm{eV}. \end{aligned} \tag{3}$$