(確率流れ密度)filename=probabilitycurrent-1-qa080428.tex

シュレディンガー方程式を満たす波動関数 $\psi(x)$ とその複素共役を用いて、次のように定義される確率流れ密度 $J(\psi(x))$ について以下の問いに答えよ。

$$J(\psi(x)) = \frac{i\hbar}{2m}\left[\frac{d\psi^*(x)}{dx}\psi(x) - \psi^*(x)\frac{d\psi(x)}{dx}\right]. \tag{1}$$

1. 複素数の定数 A と実数の定数 k を用いて、波動関数が $\psi(x) = A\mathrm{e}^{ikx}$ と与えられる場合、確率流れ密度 $J(\psi(x))$ を計算せよ。
2. 複素数の定数 A, B と実数の定数 k を用いて、波動関数が $\psi(x) = A\mathrm{e}^{ikx} + B\mathrm{e}^{-ikx}$ と与えられる場合、確率流れ密度 $J(\psi(x))$ を計算せよ。

(解答例)

1. 題意より

$$\frac{d\psi(x)}{dx} = ikA\mathrm{e}^{ikx},\ \psi^*(x) = A^*\mathrm{e}^{-ikx} \to \frac{d\psi^*(x)}{dx} = -ikA^*\mathrm{e}^{-ikx}, \tag{2}$$

$$\to J(\psi(x)) = \frac{\hbar k}{m}|A|^2. \tag{3}$$

2. 前問と同様にして

$$\frac{d\psi(x)}{dx} = ik(A\mathrm{e}^{ikx} - B\mathrm{e}^{-ikx}), \tag{4}$$

$$\psi^*(x) = A^*\mathrm{e}^{-ikx} + B^*\mathrm{e}^{ikx} \to \frac{d\psi^*(x)}{dx} = -ik(A^*\mathrm{e}^{-ikx} - B^*\mathrm{e}^{ikx}), \tag{5}$$

$$\begin{aligned}\to J(\psi(x)) &= \frac{i\hbar}{2m}[-ik(A^*\mathrm{e}^{-ikx} - B^*\mathrm{e}^{ikx}) \times (A\mathrm{e}^{ikx} + B\mathrm{e}^{-ikx}) \\ &\quad -(A^*\mathrm{e}^{-ikx} + B^*\mathrm{e}^{ikx}) \times ik(A\mathrm{e}^{ikx} - B\mathrm{e}^{-ikx})] \\ &= \frac{i\hbar}{2m} \times (ik)[-|A|^2 - A^*B\mathrm{e}^{-2ikx} + AB^*\mathrm{e}^{2ikx} + |B|^2 \\ &\quad -|A|^2 + A^*B\mathrm{e}^{-2ikx} - AB^*\mathrm{e}^{2ikx} + |B|^2]\end{aligned}$$

$$\to J(\psi(x)) = \frac{\hbar k}{m}(|A|^2 - |B|^2). \tag{6}$$