調和振動子系において、質量 m の粒子の位置の不確定さを Δx、運動量の不確定さを Δp_x をもつエネルギーの最小値を以下の手順で求めよ。プランク定数（を 2π でわった）定数を $\hbar$、角振動数を ω とする。

1. この粒子の座標を Δx、運動量を Δp_x として, 運動エネルギーと弾性による位置エネルギーの和 E をこれらで表せ。
2. 位置と運動量の不確定性関係を記せ。
3. エネルギー E が運動量の二乗と位置の二乗の和として表されているので、エネルギー E の最小値を求めるには位置と運動量の最小の不確定性を用いればよい。エネルギー E を Δp_x の関数として表し、その最小値を与える Δp_x 求めよ。
4. 前問の結果を用いてエネルギーの最小値を求め、1 次元の調和振動子系のエネルギー固有値と比較せよ。

(解答例)

1. 運動エネルギーと弾性による位置エネルギーの和であると考えて
$$E = \frac{(\Delta p_x)^2}{2m} + \frac{m\omega^2(\Delta x)^2}{2}. \tag{1}$$
2.
$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}. \tag{2}$$
3. 位置と運動量の最小の不確定性より $\Delta x = \hbar/(2\Delta p_x)$ をエネルギーの式に代入すると
$$E = \frac{1}{2}\left[\frac{(\Delta p_x)^2}{m} + \frac{m\hbar^2\omega^2}{4(\Delta p_x)^2}\right] \tag{3}$$
となる。ここで、極（小）値となる Δp_x を求める。
$$\begin{aligned} 0 &= \frac{dE}{d(\Delta p_x)} \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{2\Delta p_x}{m} + (-2)\frac{m\hbar^2\omega^2}{4(\Delta p_x)^3}\right] = \frac{1}{m(\Delta p_x)^3}\left[(\Delta p_x)^4 - \frac{(m\hbar\omega)^2}{4}\right] \\ &= \frac{1}{m(\Delta p_x)^3}\left[(\Delta p_x)^2 + \frac{m\hbar\omega}{2}\right]\left[(\Delta p_x)^2 - \frac{m\hbar\omega}{2}\right] \\ \to \Delta p_x &= \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}},\ (\frac{(\Delta p_x)^2}{2m} = \frac{\hbar\omega}{4}) \end{aligned} \tag{4}$$
4. エネルギーの式に前問題の解を代入すると
$$E = \frac{1}{2}\left[\frac{\frac{m\hbar\omega}{2}}{m} + \frac{m\hbar^2\omega^2}{4\frac{m\hbar\omega}{2}}\right] = \frac{\hbar\omega}{2}. \tag{5}$$
これは 1 次元の調和振動子系のエネルギー固有値 $\hbar\omega(n+1/2),\ n = 0, 1, 2, \cdots$ の最小値と同じである。すなわち、1 次元の調和振動子系の基底状態は位置と運動量の最小不確定の状態である。