

質量 m の粒子が次のような時間に依存しないシュレーディンガー方程式に従うとする。

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \cdot \psi(x) = E \psi(x). \quad (1)$$

ただし、 ω は正定数である。

1. 波動関数 $\psi(x) = \exp(-\alpha x^2)$ と仮定した場合、この波動関数に対応するエネルギー固有値と係数 α を $m, \hbar, \omega$ のいくつかを用いて表せ。
2. 前問題で求めた定数 α を用いて、再び波動関数を $\psi(x) = x \cdot \exp(-\alpha x^2)$ と仮定した場合、この波動関数に対応するエネルギー固有値を求めよ

(解答例)

1. 波動関数 $\psi(x) = \exp(-\alpha x^2)$ を微分して、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \psi(x) &= -2\alpha x \cdot \exp(-\alpha x^2) \\ \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) &= -2\alpha \cdot \exp(-\alpha x^2) + 4\alpha^2 x^2 \cdot \exp(-\alpha x^2) \end{aligned} \quad (2)$$

(1) 式に代入する。

$$\begin{aligned} & -\frac{\hbar^2}{2m} [-2\alpha \cdot \exp(-\alpha x^2) + 4\alpha^2 x^2 \cdot \exp(-\alpha x^2)] + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \psi(x) = E \psi(x) \quad (3) \\ \rightarrow & \left[-\frac{2\hbar^2}{m} \alpha^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 \right] x^2 + \left(\frac{\hbar^2 \alpha}{m} - E \right) = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

ここで x の値の如何にかかわらず成立するためには、両辺の係数は x に依存するものとししないものであるから、それぞれ恒等的にゼロにならねばならない。

$$\alpha^2 = \frac{m^2 \omega^2}{4\hbar^2} \rightarrow \alpha = \frac{m\omega}{2\hbar}, \quad (5)$$

$$E = \frac{\hbar^2}{m} \alpha = \frac{\hbar\omega}{2}. \quad (6)$$

2. 題意より、仮定された波動関数を微分して

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \psi(x) &= \exp(-\alpha x^2) - 2\alpha x^2 \cdot \exp(-\alpha x^2) \\ \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) &= -6\alpha x \cdot \exp(-\alpha x^2) + 4\alpha^2 x^3 \cdot \exp(-\alpha x^2) \end{aligned} \quad (7)$$

式(7)を式(4)に代入して、 x についてのべき乗について整理すると

$$-\frac{\hbar^2}{2m} (-6\alpha x + 4\alpha^2 x^3) + \frac{1}{2} m \omega^2 x^3 = E x$$

$$\begin{aligned}
&\rightarrow \left(\frac{3\hbar^2\alpha}{m} - E \right) + \left(\frac{1}{2}m\omega^2 - \frac{2\hbar^2\alpha^2}{m} \right) x^3 = 0 \\
&E = \frac{3\hbar^2\alpha}{m} = \frac{3}{2}\hbar\omega.
\end{aligned} \tag{8}$$