コンプトン効果の非相対論的導出 (filename=compton1-qa1010126.tex)
物質に X 線を照射して散乱させる場合、散乱 X 線の波長には、入射波の波長より長い波長をもつ X 線が含まれることがあり、コンプトン散乱と呼ばれている。X 線は高エネルギーの光だから、電子も本来は相対論的に扱う必要があるが、ここでは非相対論的な近似が成立すると見なしてみる。振動数 f_0，波長 λ_0 の光子が静止していた電子と弾性的に衝突して、入射方向から反時計まわりに，角度 θ の方向に散乱されて、振動数 f，波長 λ になり、電子は速さ v で入射方向から時計まわりに，角度 ϕ で散乱されたとする（反跳電子)。電子の（静止）質量を m、プランク定数を h, 真空中の光速を c とする。電子の速さを v として

1. 光子と電子の 2 体系が孤立していると考えて，この場合のエネルギー保存則を記せ。
2. この場合の運動量保存則を進行方向に沿った成分と垂直な成分に分けて記せ。
3. 前問までの結果を用いて、散乱前後の波長のずれについて次の近似的な関係式が成立することを示せ。
$$\lambda - \lambda_0 \cong \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta) \tag{1}$$
ただし, 通常の実験条件では $(f_0 - f)^2 \ll 2f_0 f(1 - \cos\theta)$ であるという近似を用いよ。
4. $h \cong 6.63 \times 10^{-34}\mathrm{joule}\cdot\mathrm{s}$ 、$c \cong 3.0 \times 10^8\mathrm{m/s}$、$m \cong 0.91 \times 10^{-30}\mathrm{Kg}$ として、電子のコンプトン波長を$\mathrm{\AA} = 10^{-10}\mathrm{m}$ 単位で計算せよ。

(解答)
1. 光子のエネルギーはアインシュタインの関係より、プランク定数×振動数であるから、エネルギー保存則は次のように書ける。
$$hf_0 = hf + \frac{1}{2}mv^2 \tag{2}$$
2. 光子の運動量の大きさはそのエネルギーを光速 c で割ったものであるから、運動量保存則は、入射方向と垂直方向についてそれぞれ次のようになる。
$$\begin{aligned} \frac{hf_0}{c} &= \frac{hf}{c}\cos\theta + mv\ \cos\phi, &(3)\\ 0 &= \frac{hf}{c}\sin\theta - mv\ \sin\phi. &(4) \end{aligned}$$
3. 式 (3), (4) から ϕ をまず消去するために、ϕ を含む項以外を左辺に移動し、辺々2 乗して加える：
$$\left(\frac{hf_0}{c} - \frac{hf}{c}\cos\theta\right)^2 + \left(\frac{hf}{c}\sin\theta\right)^2 = (mv)^2. \tag{5}$$
得られた式 (5) をさらに整理して、指定された近似式を用いると
$$\begin{aligned} &\frac{h^2}{c^2}[(f_0 - f)^2 + 2f_0 f - 2f_0 f\cos\theta] = (mv)^2 \\ &\to \frac{2h^2 f_0 f}{c^2}(1 - \cos\theta) \cong (mv)^2. \end{aligned} \tag{6}$$
式 (6) を式 (2) に代入して
$$\begin{aligned} hf_0 - hf &\cong \frac{1}{2m}\frac{2h^2 f_0 f}{c^2}(1 - \cos\theta) \\ &\cong \frac{h^2 f_0 f}{mc^2}(1 - \cos\theta) \\ \to \lambda - \lambda_0 &\cong \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta) \end{aligned} \tag{7}$$

ここで $\lambda_0 = c/f_0, \lambda = c/f$ という関係も用いた。

4.

$$\begin{aligned}
\frac{h}{mc} &= \frac{6.63\times 10^{-34}\mathrm{joule}\cdot\mathrm{s}}{0.91\times 10^{-30}\mathrm{Kg}\times 3.0\times 10^{8}\mathrm{m/s}} \\
&= \frac{6.626}{0.91\times 3}\times 10^{-34+30-8}\frac{\mathrm{joule}\cdot\mathrm{s}}{\mathrm{Kg}\times\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}} \\
&= 0.024\text{Å}. \qquad (8)
\end{aligned}$$