

座標 $\hat{x}$ とその正準共役運動量 $\hat{p}_x$ は正準交換関係

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar \quad (1)$$

を満たす。ただし、プランク定数 (2π で割ったもの) を $\hbar$ とする。

1. (通常の座標表示で) 演算子 $\hat{x}, \hat{p}_x$ を具体的に表せ。
2. 正準交換関係が成立することを証明せよ。(変数 x の任意の関数 $\psi(x)$ に両辺を作用させて、比較せよ。)

(解答例)

1.

$$\hat{x} = x, \quad (2)$$

$$\hat{p}_x = \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} \quad (3)$$

2. $\psi(x)$ を任意の波動関数とする。交換関係の定義より

$$[\hat{x}, \hat{p}_x]\psi(x) = \hat{x}\hat{p}_x\psi(x) - \hat{p}_x\hat{x}\psi(x). \quad (4)$$

ここで、第 1 項、2 項を関数の積の微分に注意しながら、それぞれ計算すると

$$\hat{x}\hat{p}_x\psi(x) = \hat{x}\{\hat{p}_x\psi(x)\} = \frac{\hbar}{i}x\frac{d\psi(x)}{dx}, \quad (5)$$

$$\hat{p}_x\{\hat{x}\psi(x)\} = \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}\{x\psi(x)\} = \frac{\hbar}{i}\psi(x) + \frac{\hbar}{i}x\frac{d\psi(x)}{dx} \quad (6)$$

が得られる。これらの結果 (5,6) を式 (4) 代入すると

$$[\hat{x}, \hat{p}_x]\psi(x) = i\hbar\psi(x). \quad (7)$$

ここで $\psi(x)$ は任意であるから、式 (1) が成立する。