

水素原子のボーア模型において、(量子数 n の電子の定常状態の) 半径 r_n は電子の質量 m 、電荷 $-e$ 、真空中の電気力の比例定数 k_0 、プランク定数 h , $\hbar \equiv h/2\pi$ を用い

$$r_n = r_B \cdot n^2, \quad (r_B \equiv \frac{1}{k_0} \frac{\hbar^2}{me^2}, n = 1, 2, \dots) \quad (1)$$

と表される。特に, $n = 1$ の半径をボーア半径と呼び、今 r_B と記す。次の問いに答えよ。

1. k_0 の次元 (単位) が $\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{coul}^{-2}$ 、 $\hbar$ の次元 (単位) が角運動量の次元 (単位) を持つとして、 r_B の次元 (単位) を確かめよ。
2. $k_0 \cong 9.0 \times 10^9 \text{N} \cdot \text{m}^2 / \text{coul}^2$ 、 $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{coul}$ 、電子の質量 $m = 0.91 \times 10^{-30} \text{kg}$ 、素電荷 $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{coul}$ 、プランク定数 $\hbar \equiv \frac{h}{2\pi} = 1.05 \times 10^{-34} \text{J} \cdot \text{s}$ 、 $1 \text{eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{J}$ を用いて、ボーア半径 r_B の値を m 単位で計算せよ。
3. ボーア半径 r_B の値を $\text{\AA}$ 単位で表せ。ただし、 $\text{\AA} \equiv 10^{-10} \text{m}$ である。

(解答例)

1. 角運動量の次元 (単位) は、 $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1} = \text{J} \cdot \text{s}$ であるから、

$$\begin{aligned} [r_B] &= \frac{1}{[k_0]} \frac{[\hbar]^2}{[m][e]^2} \\ &= \frac{1}{\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{coul}^{-2}} \frac{(\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1})^2}{\text{kg} \cdot \text{coul}^2} \\ &= \frac{1}{\text{N} \cdot \text{m}^2} \frac{(\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1})^2}{\text{kg}} = \frac{1}{\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{m}^2} \frac{\text{kg}^2 \cdot \text{m}^4 \cdot \text{s}^{-2}}{\text{kg}} \\ \rightarrow [r_B] &= \text{m}. \end{aligned} \quad (2)$$

2. 題意より

$$r_B \cong \frac{\text{coul}^2}{9.0 \times 10^9 \text{N} \cdot \text{m}^2} \times \frac{(1.05 \times 10^{-34} \text{J} \cdot \text{s})^2}{0.91 \times 10^{-30} \text{kg} \times (1.6 \times 10^{-19} \text{coul})^2} \quad (3)$$

まず、数値部分だけを指数の符号に注意して計算すると;

$$\frac{(1.05)^2}{9 \times 0.91 \times (1.6)^2} \times 10^{-68-9+30+38} \cong 0.05 \times 10^{-9}. \quad (4)$$

次に次元 (単位) の部分を計算する ;

$$\frac{\text{J}^2 \text{s}^2}{\text{Nm}^2 \text{coul}^2 \text{kg} \text{coul}^{-2}} = \frac{\text{N} \text{s}^2}{\text{kg}} = \text{m}. \quad (5)$$

よって $r_B \cong 0.5 \times 10^{-10} \text{m}$ となる。

3. $r_B \cong 0.5 \text{\AA}$.