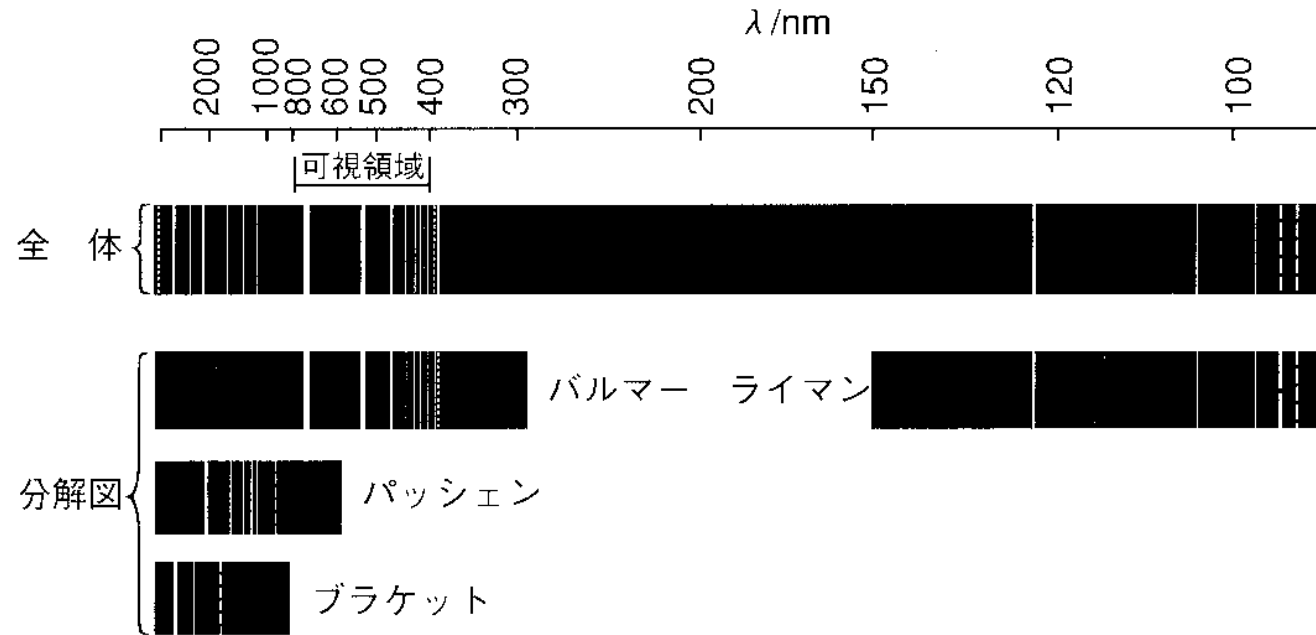


水素原子のボーア模型—過渡的理論—

目次

1. 水素原子のスペクトル(実験)とその規則性
 2. ボーア模型の基本的仮定
 3. ボーア模型の結果
 4. ボーア模型の問題点
- 付録: 国際単位系、静電単位系における電気力と電気量

1. 水素原子のスペクトル(実験)とその規則性



離散的スペクトル
(線スペクトル)の経験則

$$\frac{1}{\lambda_{n_2 \rightarrow n_1}} \propto \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right); \quad n_1 < n_2 : \text{正整数}$$

$$\rightarrow \frac{1}{\lambda_{n_2 \rightarrow n_1}} = R_{\text{exp}} \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right); \quad R_{\text{exp}} = 1.09677 \times 10^7 \text{ m}^{-1}.$$

リドベリ(Rydberg)定数

$$n_1 = 1, (n_2 = 2, 3, \dots):$$

$$n_1 = 2, (n_2 = 3, 4, \dots):$$

ライマン系列

$$n_1 = 3, (n_2 = 4, 5, \dots):$$

バルマー系列

$$n_1 = 4, (n_2 = 5, 6, \dots):$$

パッシェン系列

ブラケット系列

2. ボーア模型の基本的仮定

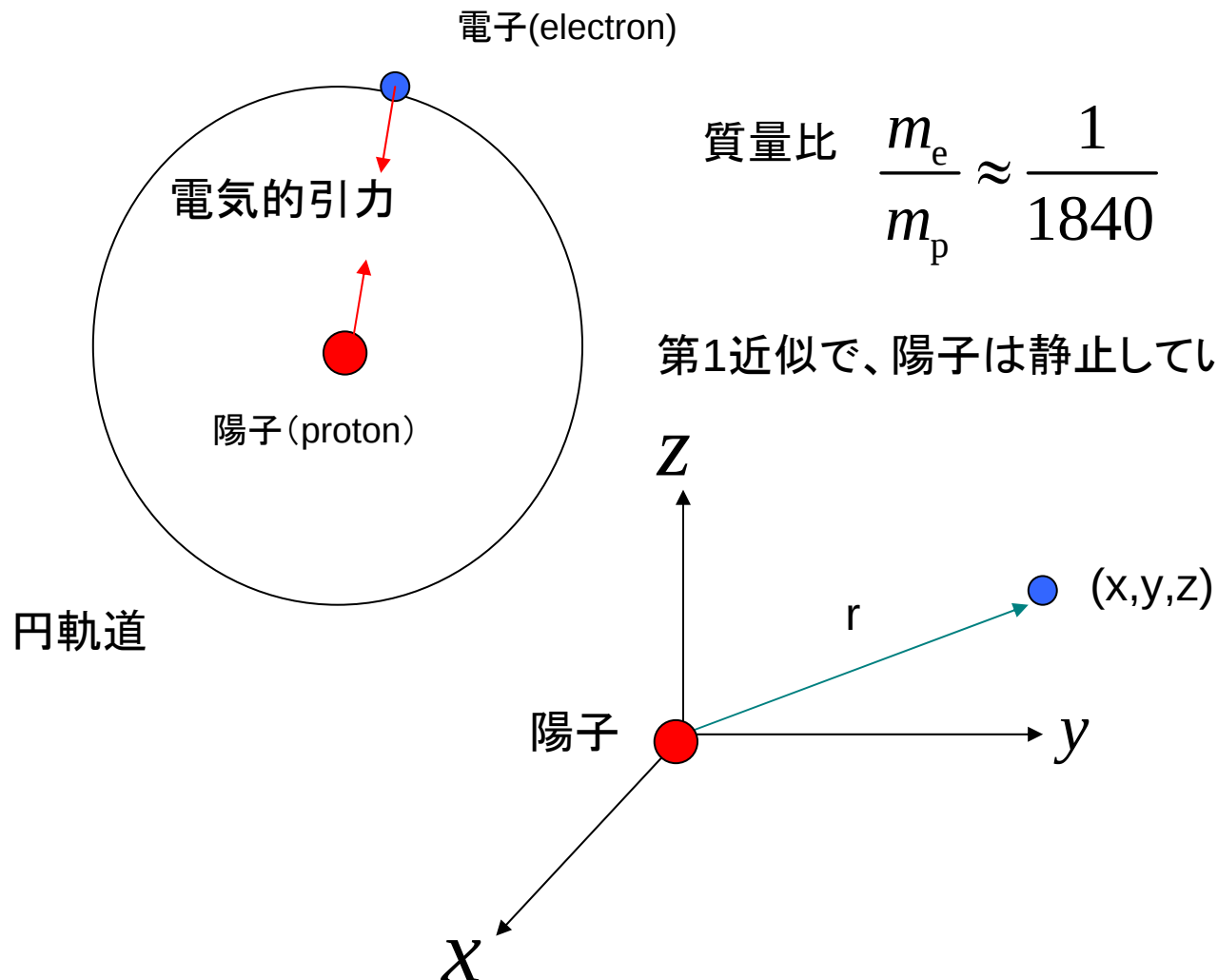
基本的仮定

- (1)原子内の電子は、**古典力学の法則**に従って、電子と原子核の間で電氣的引力を受けながら、原子核のまわりに**円運動**を行う。
- (2)量子条件: 電子の(軌道)角運動量は $h/(2\pi)$ の**整数倍のみ**許される。 h : プランク定数。
- (3)電子は定常状態の場合には電磁波を放出(吸収)しない。
- (4)振動数条件: 状態遷移の場合, その振動数 f は二つの定常状態のエネルギー差により

$$E_2 - E_1 = hf$$

で与えられる。

静止した陽子から見た電子の円運動



3. ボーア模型の結果

電子と陽子の間の電氣的引力が円運動の向心力の役割を果たすので、向心向きの運動方程式は次のようになる。

$$m \frac{v^2}{r} = k_0 \frac{e^2}{r^2} \cdots (1) \quad (k_0 : \text{電氣力の比例定数})$$

電子の力学的エネルギーEは次のように書ける。

$$E = \frac{1}{2} m v^2 - k_0 \frac{e^2}{r} \cdots (2)$$

(角運動量についての)量子条件より

$$r \cdot m v = n \hbar, (n = 1, 2, \cdots) \cdots (3) \quad \hbar \equiv \frac{h}{2\pi}$$

式(3)を(1)に代入すると

$$m \frac{1}{r} \left(\frac{n \hbar}{m r} \right)^2 = k_0 \frac{e^2}{r^2} \rightarrow r_n \equiv \frac{1}{k_0} \left(\frac{\hbar^2}{m e^2} \right) n^2 \cdots (5)$$

式(5)を(3)に代入すると

$$v = k_0 \frac{e^2}{n\hbar} \dots (6)$$

式(5)と(6)を(2)に代入すると

$$E = \frac{1}{2} m \left(\frac{k_0 e^2}{n\hbar} \right)^2 - k_0 e^2 \frac{me^2}{n^2 \hbar^2}$$

$$\rightarrow E_n = -\frac{1}{2} \left(k_0^2 \frac{me^4}{\hbar^2} \right) \cdot \frac{1}{n^2} \dots (7)$$

$$= -\frac{1}{2} \alpha^2 \cdot mc^2 \frac{1}{n^2}, \dots (8)$$

$$\alpha \equiv k_0 \frac{e^2}{c\hbar}; \alpha: \text{微細構造定数} \dots (7')$$

力学的エネルギーのマイナスの値は
電子が陽子のクーロン力により空間的
に束縛されていることを意味する。

微細構造定数は、その定義式から分かる
ように、無次元の量である。

量子数 $n=1$ の場合の半径をボーア半径 r_B と呼ぶ。

$$r_B \equiv \frac{1}{k_0} \left(\frac{\hbar^2}{me^2} \right) \dots (9)$$

エネルギー、ボーア半径の具体的な値

国際単位系(MKSA単位系)と静電単位系(cgsesu単位系)において、電気力の比例定数を与えると(付録参照)、それに対応して微細構造定数も定義されるが、その数値は二つの単位系で同じになる。これは微細構造定数が無次元量であるから当然である。

$$c\hbar = 1973.27053 \text{ eV} \cdot \text{\AA} ;$$

$$1 \text{ eV} \equiv 1.60210 \times 10^{-19} \text{ J}, 1 \text{ \AA} \equiv 10^{-10} \text{ m}$$

$$\begin{aligned} \alpha_{\text{MKSA}} &\equiv k_0^{\text{MKSA}} \times \frac{e^2}{c\hbar} = 8.98755 \times 10^9 \text{ Nm}^2 \text{C}^{-2} \times \frac{(1.60210 \times 10^{-19} \text{ C})^2}{1973.27053 \text{ eV} \cdot \text{\AA}} \\ &= \frac{1}{137.036}, \end{aligned}$$

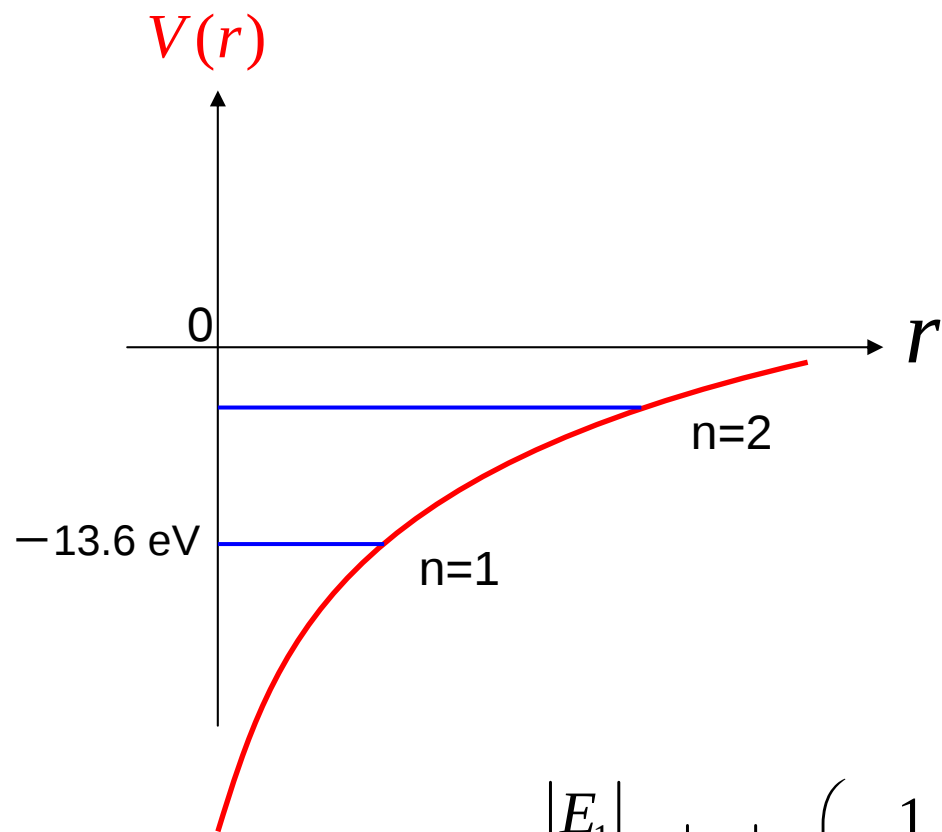
$$\begin{aligned} \alpha_{\text{cgsesu}} &\equiv k_0^{\text{cgsesu}} \times \frac{e^2}{c\hbar} = \text{dyne} \cdot \text{cm}^2 \cdot (\text{esu})^{-2} \times \frac{(4.80298 \times 10^{-10} \text{ esu})^2}{1973.27053 \text{ eV} \cdot \text{\AA}} \\ &= \frac{1}{137.036} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} mc^2 &= 0.91093897 \times 10^{-30} \text{ kg} \times 2.99792458 \times 10^8 \text{ m/s} \\ &= 0.51099906 \times 10^6 \text{ eV} \approx 0.5 \times 10^6 \text{ eV} \end{aligned}$$

$$E_n = -\frac{|E_1|}{n^2} \quad |E_1|_{\ell, m} \equiv \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left(\frac{m_e e^4}{2\hbar^2} \right) (n=1, 2, \dots)$$

$$|E_1| \approx 13.6 \text{ eV} \quad r_B = 0.529177249 \times 10^{-10} \text{ m} \approx 0.5 \text{ \AA} \quad 7$$

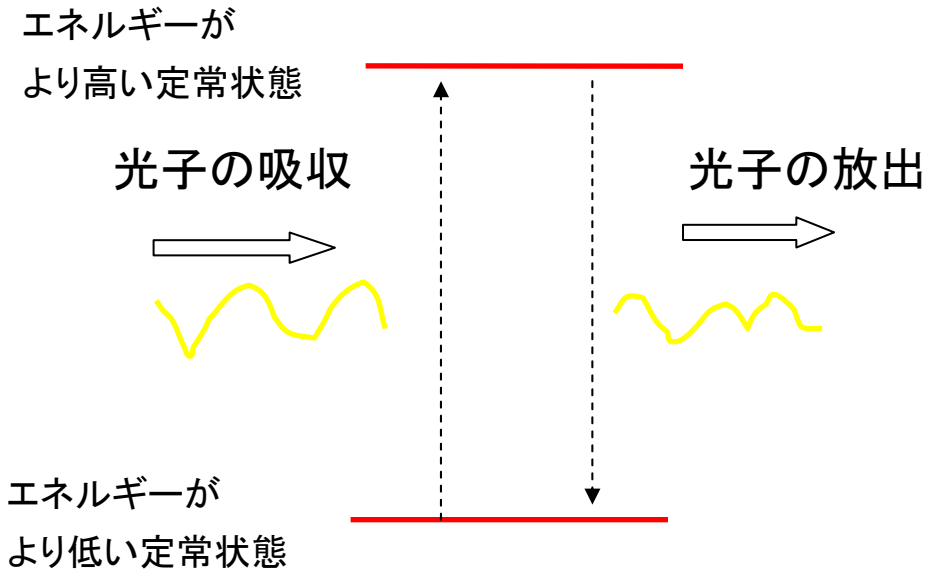
量子化されたエネルギー



$$E_n = -\frac{|E_1|}{n^2} \quad |E_1| \equiv \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left(\frac{m_e e^4}{2\hbar^2} \right) (n=1, 2, \dots)$$

$$|E_1| \approx 13.6 \text{ eV}$$

量子遷移と光の放出・吸収



光子のエネルギー (hf) と波長 λ , 振動数 f

$$hf = E_2 - E_1 ; hf = \frac{ch}{\lambda}, E_n \approx -\frac{13.6 \text{ eV}}{n^2}$$

$$E_2 - E_1 = 10.2 \text{ eV}, \lambda = 121.6 \text{ nm} = 121.6 \times 10^{-9} \text{ m}$$

5. ボーア模型の問題点

問題点:

電子の安定性を説明できない(仮定している)。

放出される光(色)の強さの違いがあることを説明できない。

「電子は原子核のまわりを、人工衛星のように、周回する」という素朴な(しかし、誤りの)イメージが広まった。

付録：国際単位系、静電単位系における 電気力と電気量

目次

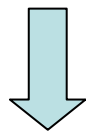
1. 物理学における文字、文字式の意味
2. 電気力における単位系
3. 国際単位系における電気力と電気量
4. 静電単位系における電気力と電気量
5. 二つの単位系における電気量の関係

1. 物理学における文字、文字式の意味

(文字、文字式) = (数値) × (単位)

質量 m 、 M の二つの物体が距離 r だけ離れている場合の、
重力(万有引力)の大きさ F

$$F = G \frac{mM}{r^2} \quad G = 6.6742 \times 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{(\text{kg})^2}$$



物理量は斜体(italic)で、単位は立体(roman)で記す。
同じ単位のものしか加減はできない。違う単位の物理量でも割り算、掛け算はできる。

$$\left[\frac{F}{\text{N}} \right] = 6.6742 \times 10^{-11} \frac{\left[\frac{m}{\text{kg}} \right] \left[\frac{M}{\text{kg}} \right]}{\left[\frac{r}{\text{m}} \right]^2}$$

2. 電気力における単位系

電磁気学においては、歴史的な事情と、マクロ系かミクロ系のいずれに主たる関心があるかにより、複数の単位系が使用されてきた。それらは長所とともに短所があり、それらの相互の関係は必ずしも理解が容易ではない。ここでは、電気力(クーロン力)の数式的表現に直結する、国際単位系(MKSA単位系)と静電単位系(cgsesu単位系)を比較検討する。

一般に、電気量 Q , Q' をもつ二つの電荷が距離 r だけ離れている場合の電気力の大きさ F は、電荷の積に比例し、距離に反比例するので、比例係数を k_0 として、以下のように表される。

$$F = k_0 \frac{QQ'}{r^2}$$

3. 国際単位系における電気力と電気量

国際単位系 (MKSA単位系) では長さを[m], 電気量をクーロン[C]、力をニュートン[N]で測り、比例係数 k_0 は次のように決められている。

$$F = k_0^{\text{MKSA}} \frac{QQ'}{r^2},$$

$$k_0^{\text{MKSA}} \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad (\epsilon_0 : \text{真空の誘電率})$$

$$= 8.98755 \times 10^9 \text{ Nm}^2\text{C}^{-2} \simeq 9 \times 10^9 \text{ Nm}^2\text{C}^{-2}$$

この式は次のように書き直すと、意味がより鮮明になる。

$$\left[\frac{F}{\text{N}} \right] = 8.98755 \times 10^9 \frac{\left[\frac{Q}{\text{C}} \right] \left[\frac{Q'}{\text{C}} \right]}{\left[\frac{r}{\text{m}} \right]^2}$$

長所: 実用的で人間サイズに適合。

短所: 真空の誘電率が現れる唐突さ。比例係数は著しく大きな数となる。

4. 静電単位系における電気力と電気量

静電単位系 (cgseesu単位系) では長さを[cm], 電気量を静電単位[esu]、力をダイン[dyne]で測り、比例係数 k_0 は次のように決められている。esu=electro-static unit

$$F = k_0^{\text{cgseesu}} \frac{QQ'}{r^2},$$

$$k_0^{\text{cgseesu}} = 1 \text{ dyne} \cdot \text{cm}^2 (\text{esu})^{-2},$$

$$1 \text{ dyne} \equiv 1 \text{ g} \cdot \text{cm} \cdot \text{s}^{-2} = 10^{-5} \text{ N}.$$

この式は次のように書き直すと、意味がより鮮明になる。

$$\left[\frac{F}{\text{dyne}} \right] = 1 \cdot \frac{\left[\frac{Q}{\text{esu}} \right] \left[\frac{Q'}{\text{esu}} \right]}{\left[\frac{r}{\text{cm}} \right]^2}$$

長所: 比例係数は単純、明快。電子などミクロな系の記述には最適。

短所: 人間サイズから見ると、非常に小さい値となり、実用性が低い。

5. 二つの単位系における電気量の関係

力の大きさF、距離r、電気量など物理量は人間が選択する単位系によらないはずなので、それぞれの大きさと単位こみでは、同じであると考えると

$$k_0^{\text{cgse su}} = k_0^{\text{MKSA}}$$

$$\rightarrow \text{dyne} \cdot \text{cm}^2 \cdot (\text{esu})^{-2} = 8.98755 \times 10^9 \text{Nm}^2\text{C}^{-2}$$

$$\rightarrow 1 \text{esu} = \left(\frac{10^{-9-5-4}}{8.98755} \right)^{1/2} \text{C}$$

$$\therefore 1 \text{esu} = 0.333564 \times 10^{-9} \text{C}$$

$$\rightarrow e = \begin{cases} 1.60210 \times 10^{-19} \text{C} \\ 4.80298 \times 10^{-10} \text{esu} \end{cases}$$

参考文献: バクーレー物理学コース4「量子物理(上)」、丸善、1972年。

P. 52, 表2A(主な物理定数)