

次のような一次元の階段型ポテンシャル障壁に左側から、エネルギー E の粒子 (質量 m) が進入する。エネルギー E がその障壁 V_0 よりも低い ($0 < E < V_0$) 場合以下の問に答えよ。ただし、プランク定数を $\hbar \equiv \frac{h}{2\pi}$ とする。

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ V_0 & (x > 0) \end{cases}$$

1. 領域 I ($x \leq 0$), 領域 II ($x > 0$) ごとにシュレディンガー方程式を立てて、一般解を記せ。
2. 波動関数についての境界条件より、特殊解の積分定数の比を求めよ。
3. 反射率 R 、透過率 T およびそれらの和を計算せよ。
4. $0 < E < V_0$ の場合には、古典物理学的には禁止される領域 II ($x > 0$) に進入できる確率が存在するかどうか述べよ。

(解答例)

1. シュレディンガー方程式と一般解

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi_I = E \psi_I. \quad (1)$$

$$\rightarrow \frac{d^2}{dx^2} \psi_I = -k^2 \psi_I \quad (2)$$

$$k \equiv \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \quad (k: \text{波数}) \quad (3)$$

$$\psi_I(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}. \quad (4)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi_{II} + V_0 \psi_{II} = E \psi_{II} \quad (5)$$

$$\rightarrow \frac{d^2}{dx^2} \psi_{II} = \gamma^2 \psi_{II} \quad (6)$$

$$\gamma \equiv \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}} \quad (7)$$

$$\psi_{II}(x) = Ce^{-\gamma x} (e^{\gamma x}: \text{不適}) \quad (8)$$

2. 境界条件より

$$\psi_I(0) = \psi_{II}(0) \quad (9)$$

$$\rightarrow A + B = C \quad (10)$$

$$\psi'_I(0) = \psi'_{II}(0) \quad (11)$$

$$\rightarrow ik(A - B) = -\gamma C \quad (12)$$

$$\frac{B}{A} = \frac{ik + \gamma}{ik - \gamma}, \frac{C}{A} = \frac{2ik}{ik - \gamma} \quad (13)$$

$$(14)$$

3. 確率の流れ (inc 入射, ref 反射, trans 透過)

$$J_{inc} = \frac{\hbar}{2mi} [(Ae^{ikx})^* \frac{\partial}{\partial x} (Ae^{ikx}) - (Ae^{ikx}) \frac{\partial}{\partial x} (Ae^{ikx})^*] \quad (15)$$

$$= \frac{\hbar k}{m} |A|^2. \quad (16)$$

$$J_{ref} = \frac{\hbar}{2mi} [(Be^{-ikx})^* \frac{\partial}{\partial x} (Be^{-ikx}) - (Be^{-ikx}) \frac{\partial}{\partial x} (Be^{-ikx})^*] \quad (17)$$

$$= -\frac{\hbar k}{m} |B|^2. \quad (18)$$

$$R \equiv \frac{-J_{ref}}{J_{inc}} = \left| \frac{B}{A} \right|^2 = 1 \quad (19)$$

$$J_{trans} = \frac{\hbar}{2mi} [(Ce^{-\gamma x})^* \frac{\partial}{\partial x} (Ce^{-\gamma x}) - (Ce^{-\gamma x}) \frac{\partial}{\partial x} (Ce^{-\gamma x})^*] \quad (20)$$

$$= 0. \quad (21)$$

$$T \equiv \frac{J_{trans}}{J_{inc}} = 0. \quad (22)$$

$$R + T = 1.0. \quad (23)$$

4. 前問の結果より、反射率 $R = 1$ となり、全反射する。しかし、古典的粒子描像とは異なり、s障壁内部の存在確率密度は $|\psi_{II}(x)| = |C|e^{-\gamma x}$ となり、部分的に侵入する確率がある。侵入距離の目安は $1/\gamma$ であり、 $1/\sqrt{V_0 - E}$ に比例する。