

相対論的運動学 as of 2004.10.12

特殊相対論において得られる基本的な性質のうち、力（相互作用）に無関係な部分、運動学について調べてみよう。

1 ローレンツ変換とその逆変換

ここでは S 系（「静止」系）とその x 軸方向に等速度 V で移動する別の慣性系（「運動」系）を考える。ここで「」をつけた理由は、静止と運動は相対的な概念であって、絶対的に静止する系はないからである。そして x 軸以外の成分は簡単のために無視することにする。二つの座標系において、粒子の座標と時刻をそれぞれ $(x, y, z, t), (x', y', z', t')$ とすると、それらの間はローレンツ変換とその逆変換で関係づけられている。

$$x' = \frac{(x - Vt)}{\sqrt{1 - (\frac{V}{c})^2}}, \quad (1.1)$$

$$t' = \frac{(t - \frac{V}{c^2}x)}{\sqrt{1 - (\frac{V}{c})^2}}, \quad (1.2)$$

$$x = \frac{(x' + Vt')}{\sqrt{1 - (\frac{V}{c})^2}}, \quad (1.3)$$

$$t = \frac{(t' + \frac{V}{c^2}x')}{\sqrt{1 - (\frac{V}{c})^2}}. \quad (1.4)$$

これらの変換は速度 V が小さい極限では、ガリレイ変換に帰着する。

$$x' = x - Vt, \quad (1.5)$$

$$t' = t, \quad (1.6)$$

$$x = x' + Vt'. \quad (1.7)$$

ローレンツ変換とその逆変換は次のように書き直しておくと、計算上便利である。

$$x' = \gamma(x - \beta ct), \quad (1.8)$$

$$ct' = \gamma(ct - \beta x), \quad (1.9)$$

$$x = \gamma(x' + \beta ct'), \quad (1.10)$$

$$ct = \gamma(ct' + \beta x'). \quad (1.11)$$

ここで、相対論でよく使用される記号

$$\beta \equiv \frac{V}{c}, \quad (1.12)$$

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (\gamma > 1) \quad (1.13)$$

を導入した。

2 相対的に運動している物体の収縮（ローレンツ収縮）

2.1 物体の長さを測定する意味

物体の長さは、ある慣性系にいる観測者が、ある基準になるモノサシ（物差）をもっていて、測定する2点がこのモノサシの何倍かで決まる。重要なことは、この2点を読み取る時刻が同じ系で同時でなければならないことである（物体の両端の位置の測定に対する本質的な必要条件）。この条件に従わなければ、測定される長さは全く任意であり、負やゼロにもなりうることは容易に分かる。

2.2 S'系（「運動」系）に固定された物体の長さをS系（「静止」系）で測る場合

棒の両端の座標を A, B で記すと、棒の長さはそれぞれの系において S'系における長さ

$$\ell' \equiv x'_B - x'_A \quad (2.1)$$

と定義され、S系における長さは

$$\ell \equiv x_B - x_A \quad (2.2)$$

となる。ここで、これらの座標が無関係ではなく、次のように相互にローレンツ変換で関係づけられていることに注意すべきである。

$$x'_A = \gamma(x_A - \beta ct_A), \quad (2.3)$$

$$x'_B = \gamma(x_B - \beta ct_B) \quad (2.4)$$

これらを式 (2.1) に代入すると

$$\ell' = \gamma(x_B - x_A) - \gamma\beta c(t_B - t_A) \quad (2.5)$$

が得られる。S系での長さの測定では、S系で「同時刻」($t_A = t_B$) が条件であることに留意すると、式 (2.5) は

$$\ell' = \gamma(x_B - x_A) = \gamma\ell \quad (2.6)$$

と書ける。したがって、

$$\ell = \ell' \sqrt{1 - \beta^2} < \ell' \quad (2.7)$$

となり、S'系に固定してある物体の長さをS系で測ると短くなる。

2.3 逆に、S系（「静止」系）に固定された物体の長さをS'系（「運動」系）で測る場合

同様に、棒の両端の座標は相互に、逆ローレンツ変換で関係づけられている。

$$x_A = \gamma(x'_A + \beta ct'_A), \quad (2.8)$$

$$x_B = \gamma(x'_B + \beta ct'_B) \quad (2.9)$$

これらを(2.2)式に代入すると

$$\ell = \gamma(x'_B - x'_A) + \gamma\beta c(t'_B - t'_A) \quad (2.10)$$

となる。ここで、S'系における長さの測定では、S'系で「同時刻」($t'_A = t'_B$)が条件であるから、(2.10)式は

$$\ell = \gamma(x'_B - x'_A) = \gamma\ell' \quad (2.11)$$

と書ける。したがって、

$$\ell' = \ell\sqrt{1 - \beta^2} < \ell \quad (2.12)$$

となり、S系に固定されている物体をS'系で測ると、短くなる。

以上、S系とS'系と相互に運動しているのであるから、いずれの場合にも、運動している物体は別の慣性系から見ると、短縮して見えることになる。運動は相対的な概念であるから、物理法則が客観的であるためにも、二つの座標系で法則を考えた場合に、同じ結論が導けることは必要である。

収縮の度合いを具体的に調べてみよう。相対速度Vとして新幹線の走行速度、時速300キロメートルを選ぶと

$$\beta \approx \frac{300 \times 10^3 \text{mh}^{-1}}{3.0 \times 10^8 \text{ms}^{-1}} = 2.8 \times 10^{-8} \quad (2.13)$$

であるから、収縮度はとなり、日常生活ではまったく無視できる大きさで、経験とは矛盾しない。しかし、相対速度Vが光速に比べて無視できない値になると、収縮効果は有意の大きさとなる。

2.4 何が収縮して観測されるか [1]

われわれはふつう何気なく、長さというものはモノサシで測れるものだと考えているが、これをアインシュタイン流に言えば、長さというものはその系の同時刻に測ったものであるということになる。測られるものとモノサシが同じ速度で運動していることが前提条件になっている。特殊相対論で議論されるのは、運動しているものは短く見えたり、縮んで見えるということである。縮んで見えることは縮むことではない。

電車の話で具体的に考えてみよう。外に立って電車を見ている人にとって、電車の前部と後部のランプが同時に光ったとすると、それが電車の長さである。ランプが光った瞬間に、電車の前部と後部の位置の地面に印をつけておけば、それが（外から見た）長さである。では、電車の中の中央にいる人にはどうなるか。中の人にとって前部と後部のランプが同時についたときに、地面に印をぽっとつけて後で2点間の間隔を測定することにしよう。電車の中にいる人がやっていることを外の人が見たら、後部のランプまず光り、すこし遅れて前部のランプが光るから、まず、後部のランプがついたときに地面に印をつけて、次に前部のランプがついたときに地面に印をつける。その間に電車は前に進んでいるのですから、外で見ている人がつけた印よりも前部はすこし前に進んでいる。つまり、動いている電車の同時刻で測定した電車の長さは、外でたっている人の同時刻で測定した電車の長さよりも長くなっている。中の人にとって電車は止まっているから、中の人が測った長さが止まっているときの電車の長さである。これに対して、外の人が測ったのは運動している電車の長さは縮んで短くなる。（相対性原理にふさわしく）逆も同じことが言える。地面というモノサシで測れば縮んだのに、電車の中のモノサシでは縮んでいない！これは、運動している物体はモノサシと一緒に縮んだと考えればいい。

このような事情のポイントは長さの話なのに時間もからんでくることである。実際のものの長さが縮むことはない。ある物体の（絶対的な）長さというものはないのであって、あるのは、ある時刻において、ある場所にある物体が占めるという出来事の連続だけである。

運動していても、ある物体の固有の長さは変わらないのであって、動いている物体の長さとその固有の長さは同じではない。

次の項で述べるように、長さの定義は同時刻と関係があり、同時刻というのは速度によって異なる。したがって長さも異なる。

3 空間的に隔てられた事象の「同時刻」概念の相対性

「静止」系（S系）において、二つの事象A,Bが同時に起きたとする。

$$t_A = t_B. \quad (3.1)$$

しかし、一般には、事象A,Bが起きる場所は同じではないので

$$x_A \neq x_B \quad (3.2)$$

である。この二つの事象を「運動」系（S'系）から観測した場合の、それぞれの時刻はローレンツ変換により

$$ct'_A = \gamma(ct_A - \beta x_A), \quad (3.3)$$

$$ct'_B = \gamma(ct_B - \beta x_B) \quad (3.4)$$

となる。式 (4.2)、(4.3) より、「運動」系 (S'系) における、二つの事象の時間間隔は

$$t'_B - t'_A = \gamma[(t_B - t_A) - \frac{\beta}{c}(x_B - x_A)] \quad (3.5)$$

と表される。条件 (3.1) を用いて

$$t'_B - t'_A = -\frac{\beta\gamma}{c}(x_B - x_A) \quad (3.6)$$

したがって、空間的に隔てられている事象 ($x_A \neq x_B$) の場合、一般に $t'_B - t'_A \neq t_B - t_A$ となり、同時性の概念は絶対的ではなく、観測者のいる座標系に依存していることがわかる。

4 相対的に運動している時計の遅れ

4.1 S系 (静止) 系) から S'系 (「運動」系) 固定の時計の進み方を考える場合

ある時計を S'系の原点に固定する。時間の進み方の違いを考えるために、初めを事象 A、次の時間測定を事象 B と記す。S系における 2 点 には同じ性能の 2 個の時計を予め置いておく。初めの時刻において二つの座標系の原点が一致しており、その後、S'系は等速度 V で移動すると考える。ここで S系におけるすべての時計は等しく進行する。

この時計の S'系における (ふたつの事象 A,B の) 座標は

$$x'_A = x'_B (= 0) \quad (4.1)$$

である。初めの時刻と終わりの時刻におけるローレンツ変換は、それぞれ

$$ct'_A = \gamma(ct_A - \beta x_A), \quad (4.2)$$

$$ct'_B = \gamma(ct_B - \beta x_B) \quad (4.3)$$

となる。また S'系固定の時計は S系から見て、二つの時刻間隔 ($t_B - t_A$) の間に、距離 ($x_B - x_A$) だけ進むので

$$(x_B - x_A) = V(t_B - t_A) \quad (4.4)$$

である。S'系における時間の変化を式 (4.2)、(4.3)、(4.4) を用いて計算すると

$$t'_B - t'_A = (t_B - t_A)\sqrt{1 - (V/c)^2} \quad (4.5)$$

となり、「運動」系に固定されている時計は、「静止」系から見ると、遅れることになる。

4.2 S'系（「運動」系）からS系（「静止」系）固定の時計の進み方を考える場合

この場合には、S系の変数の役割とS'系の変数の役割が入れ替わり、かつ速度が V から $-V$ に変わることを除いて、前項と同じ議論が適用できて、その結果は

$$t_B - t_A = (t'_B - t'_A)\sqrt{1 - (V/c)^2} \quad (4.6)$$

となる。この結果は式(4.5)と一見矛盾するように見えるかもしれない。しかし、「静止」系と「運動」系という概念は相対的なものである。「運動」系から見ると「静止」系も逆向きに運動していることになる。式(4.6)は、「運動」系であるS'系からみると「静止」系であるS系に固定されている時計は逆向きに運動しているのであって、S'系固定の時計に比べて同じ割合で遅れるということを意味する。

以上、いずれの系からも見ても、相対的に運動して時計は（観測者の置かれた系に固定されている時計に比べて）遅れるという結論が得られたことになる。ここで遅延の割合は、 $\sqrt{1 - (V/c)^2}$ または時間の遅れの偏差は1.0からの差を考えると

$$\left(\frac{t'_B - t'_A}{t_B - t_A}\right) - 1 = \sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2} - 1 \approx -\frac{1}{2}\left(\frac{V}{c}\right)^2 \quad (4.7)$$

となる。通常速度 V に対しては、一般には、この時間遅れは無視できる大きさである。しかし、カーナビなど使用されているGPS（全地球位置測定システム）の原理には光速不変性、ここで議論した時間遅れ（その大きさはGPS衛星の速度を3.874km/sとして 8.4×10^{-11} ）などが必要不可欠なのである。

5 相対的に運動している系における平均寿命の増加

相対的に運動している時計進み方についての議論と同様にして、ある放射性物質が「静止」系において、その平均寿命が τ であったとする。この放射性の物質は速度 V で「運動」する系から見ると、その平均寿命 τ' は

$$\tau' = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}} \quad (5.8)$$

で与えられる。この関係は、相対的に運動している時計は遅れるという性質により、相対的に運動している放射性物質の平均寿命が延びることを意味している。

6 相対論的な速度合成

逆ローレンツ変換の座標と時間について微分をとると、それぞれ

$$dx = \frac{(dx' + V dt')}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}, \quad (6.1)$$

$$dt = \frac{(dt' + \frac{V}{c^2}dx')}{\sqrt{1 - (\frac{V}{c})^2}}. \quad (6.2)$$

が得られる。これらの式より S 系（「静止」系）における速度成分は

$$\begin{aligned} v_x &\equiv \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + V dt'}{dt' + \frac{V}{c^2}dx'} \\ &= \frac{\frac{dx'}{dt'} + V}{1 + \frac{V}{c^2} \frac{dx'}{dt'}} \end{aligned} \quad (6.3)$$

となる。ここで S' 系（「運動」系）における速度成分

$$v'_x \equiv \frac{dx'}{dt'} \quad (6.4)$$

を導入して、式 (6.3) に代入すると、相対論的な速度合成の公式が得られる。

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{V v'_x}{c^2}} \quad (6.5)$$

速度 V が小さい極限ではガリレイ変換における、見慣れた速度合成の公式が得られる。

$$v_x \approx v'_x + V. \quad (6.6)$$

ここで、式 (6.3) の意味を知らべてみよう。

1. $V = \frac{c}{2}, v'_x = \frac{2c}{3}$ の場合

$$v_x = \frac{\frac{c}{2} + \frac{2c}{3}}{1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}} = \frac{7c}{8}, \quad (6.7)$$

2. $V = \frac{c}{2}, v'_x = c$ の場合

$$v_x = \frac{\frac{c}{2} + c}{1 + \frac{1}{2}} = c. \quad (6.8)$$

一般に、式 (6.3) より

$$\frac{v_x}{c} = 1 - \frac{(1 - \frac{v'_x}{c})(1 - \frac{v_x}{c})}{1 + \frac{v_x}{c} \frac{v'_x}{c}} \quad (6.9)$$

が得られる。これは 粒子の速度が光の速度を越えることができないこと を意味する。

7 光のドップラー効果

「静止」している光源における光の振動数と波長をそれぞれ ν, λ とする。光源が（観測者に対して）速度 V で近づく場合の振動数 ν' は

$$\nu' = \nu \sqrt{\frac{c - V}{c + V}} \quad (7.1)$$

と表される。

参考文献

- [1] 佐藤文隆「宇宙のしくみとエネルギー」、朝日文庫、1993 年。pp.108 – 116.
- [2] 松田卓也、二間瀬敏也「なっとくする相対性理論」、講談社、1996 年。pp.6 – 70.
- [3] テルレッキー「相対論のパラドックス」、東京図書。1968 年。特に、pp. ?