

自由な陽子と電子から水素原子という複合粒子が形成される場合の質量欠損を考える。

(静止)質量 m 、速度 v の粒子の相対論的エネルギーは

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \approx mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 \quad (1)$$

となる。外部と質量、相互作用などのやりとりがない系(孤立系)においては、相対論的エネルギーとポテンシャル・エネルギーの和が保存される。すると、初め静止していた複合粒子のエネルギー保存則は

(複合粒子全体の静止エネルギー)

= (構成粒子の相対論的エネルギーの和)

+ (構成粒子間の相互作用のポテンシャル・エネルギー)

と表現される。今考えている場合、陽子の質量と速度をそれぞれ m_p, v_p とし、電子の質量

と速度をそれぞれ m_e, v_e 、中性水素原子の質量 M_H とする。陽子と電子からなる複合粒子の

重心 G から、陽子までの距離を r_p 、電子までの距離を r_e とすると、エネルギー保存則とその

近似的表現は

$$\begin{aligned} M_H c^2 &= \frac{m_p c^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v_p}{c}\right)^2}} + \frac{m_e c^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v_e}{c}\right)^2}} - k_0 \frac{e^2}{(r_p + r_e)} \\ &\approx m_p c^2 + \frac{1}{2} m_p v_p^2 + m_e c^2 + \frac{1}{2} m_e v_e^2 - k_0 \frac{e^2}{(r_p + r_e)} \end{aligned} \quad (2)$$

となる。ここで、 k_0 は電気力(クーロン力)の比例係数で、MKSA 単位系の場合には、真空の誘電率 ϵ_0 を用いて、 $k_0 = 1/(4\pi\epsilon_0)$ と表される。

ここで、水素原子が形成される場合の質量欠損は

$$\begin{aligned} \Delta m &\equiv m_p + m_e - M_H \\ &= -\frac{1}{c^2} \left[\frac{1}{2} m_p v_p^2 + \frac{1}{2} m_e v_e^2 - k_0 \frac{e^2}{(r_p + r_e)} k_0 \right] \end{aligned} \quad (3)$$

と計算される。また、結合エネルギーは

$$\begin{aligned} BE &\equiv \Delta m \cdot c^2 \\ &= - \left[\frac{1}{2} m_p v_p^2 + \frac{1}{2} m_e v_e^2 - k_0 \frac{e^2}{(r_p + r_e)} k_0 \right] \end{aligned} \quad (4)$$

と表される。この結果は質量が欠損して結合エネルギーとなると解釈できる。この結合エネルギーは結局、(基底状態の)全エネルギー、すなわち、運動エネルギーとポテンシャルの和にマイナス符号をつけたものに等しい。この数式表現をみる限り、マイナスの値をもつように見えるかもしれないが、実はプラスの値をもつことが次のようにしてわかる。陽子と電子は共通の重心 G の周りを円運動すると考えると、運動方程式(ベクトル関係式)の中心向き成分は、それぞれ

$$m_p \left(\frac{v_p^2}{r_p} \right) = k_0 \frac{e^2}{(r_p + r_e)^2} \quad (5)$$

$$m_e \left(\frac{v_e^2}{r_e} \right) = k_0 \frac{e^2}{(r_p + r_e)^2} \quad (6)$$

となる。これらを用いて、 $m_p v_p^2, m_e v_e^2$ を消去すれば

$$BE = k_0 \frac{e^2}{2(r_p + r_e)} \quad (7)$$

となり、上述のように定義された結合エネルギーはプラスの値をもつことが確かめられる。

量子力学(またはボーア模型)によれば、水素原子の結合エネルギーは約13eVとなり、電子の静止エネルギーの値 $m_e c^2 \cong 0.5\text{MeV} = 500000\text{eV}$ に比べれば十分に小さい。したがって、原子分子の世界を考える場合には無視することが多い。しかし、原子核の世界を考える場合には、質量欠損はかなり大きくなり、重要となる。