(磁場の下での相対論的運動:jibaundou.tex)

磁束密度の大きさ B の磁場と直交する半径 R の円周上を運動する荷電粒子（静止質量 m_0、電荷 q）について相対論的な速度に対する表式を求め、速さが光速 c よりも大きくなるかどうかを次の手順で調べよ。

1. 粒子の速さ v の場合の相対論的質量 m の表式を記せ。
2. 力のベクトルが $\boldsymbol{F}$ の場合の相対論的運動方程式を記せ。
3. ここで働く力はローレンツ力であるとすれば、この力は仕事をするかしないか、理由を述べて応えよ。
4. 等速円運動であっても、速度ベクトル $\boldsymbol{v}$（向き）は時間変化することを考慮して、相対論的運動方程式の時間微分を具体的に実行せよ。
5. 円周方向の速さ v, 半径 R の円運動をしている場合の向心加速度の大きさを記せ。
6. 力がローレンツ力であるとして、その大きさを B, q, v で表せ。
7. 以上の結果より、速さ v の表式を求め、光速度を越えるかどうかを調べよ。

（解答例）

1. 相対論的質量 m の表式
$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}. \tag{1}$$
2. 相対論的運動方程式
$$\boldsymbol{F} = \frac{d(m\boldsymbol{v})}{dt}. \tag{2}$$
3. ローレンツ力（$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$) は速度と垂直の向きに働くので仕事をしない。(従って、速さ v は一定（等速円運動）である。）
4.
$$\begin{aligned}\boldsymbol{F} &= \frac{d}{dt}[\frac{m_0\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}] \\ &= \frac{m_0}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}.\end{aligned} \tag{3}$$
5.
$$|\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}| = \frac{v^2}{R}. \tag{4}$$
6.
$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \rightarrow F = qvB. \tag{5}$$
7. 以上の結果より、
$$\begin{aligned}&\frac{m_0}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}\frac{v^2}{R} = qvB \rightarrow v = \frac{qBR}{m_0}\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2} \rightarrow v^2 = (\frac{qBR}{m_0})^2 \\ &v = \frac{(\frac{qBR}{m_0})}{\sqrt{1+[\frac{(\frac{qBR}{m_0}}{c}]^2}} < c.\end{aligned} \tag{6}$$

上記の表式において、$c \to \infty$ の極限をとれば、古典論における速度が求められる。