(真空中の電磁波の波動方程式 1b)

真空中のマックスウェル方程式（の微分形）は $\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0, \nabla\cdot\boldsymbol{H}=0, \nabla\times\boldsymbol{H}=\partial\boldsymbol{D}/\partial t, \nabla\times\boldsymbol{E}=-\partial\boldsymbol{B}/\partial t$, ただし、$\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{H}$ と表される。

1. 任意のベクトル $\boldsymbol{A}$ に対して、公式 $\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-(\nabla\cdot\nabla)\boldsymbol{A}$ を証明せよ。
2. 電場 $\boldsymbol{E}$ と磁場 $\boldsymbol{H}$ が波動方程式を満たすことを示せ。
3. この波動の（伝搬）速度はどのように表されるか、与えられた文字を用いて表せ。

(解答)

1. ベクトル $\boldsymbol{A}=(A_x, A_y, A_z)$ として、公式の x 成分を考えてみる。

$$\begin{aligned}\{\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})\}_x &= \frac{\partial(\nabla\times\boldsymbol{A})_z}{\partial y}-\frac{\partial(\nabla\times\boldsymbol{A})_y}{\partial z} \\ &= \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y})-\frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_y}{\partial x}) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z})-(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2})A_x \\ &= \{\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-(\nabla\cdot\nabla)\boldsymbol{A}\}_x. \end{aligned} \tag{1}$$

   y, z 成分も同様にして証明できるので、与式が成立することが証明された。

2. マックスウエル方程式の第４式より

$$\nabla\times\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}. \tag{2}$$

   この式に第１，２式と前問の結果を使って

$$\begin{aligned}\nabla\times(-\nabla\times\boldsymbol{E}) &= \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2} \\ \to(\nabla\cdot\nabla)\boldsymbol{E} &= \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}\end{aligned} \tag{3}$$

   これは x, y, z 座標を用いると、次式のように３次元空間の波動方程式になる。

$$(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2})\boldsymbol{E}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}. \tag{4}$$

   同様にして、磁場 $\boldsymbol{H}$ も次のように波動方程式を満たす。

$$(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2})\boldsymbol{H}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\boldsymbol{H}}{\partial t^2}. \tag{5}$$

3. 波動方程式の形より、この波動の伝搬速度 v は $v=1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$