(真空中の電磁波の波動方程式 1a:elemagwave1a-qa051019.tex)

真空中のマックスウェル方程式（の微分形）は $\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0, \nabla\cdot\boldsymbol{H}=0, \nabla\times\boldsymbol{H}=\partial\boldsymbol{D}/\partial t, \nabla\times\boldsymbol{E}=-\partial\boldsymbol{B}/\partial t$, ただし、$\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{H}$ と表される。

1. 真空中で電場 $\boldsymbol{E}$ が y 軸方向、磁場 $\boldsymbol{H}$ が z 軸方向を向き、ともに x, t のみの関数であるとき、マックスウェル方程式（の微分形）を具体的に書け。
2. 電場 $\boldsymbol{E}$ と磁場 $\boldsymbol{H}$ が (一次元の) 波動方程式を満たすことを示せ。
3. この波動の（位相）速度はどのように表されるか、与えられた文字を用いて表せ

(解答)

1. 題意より、$\boldsymbol{E}=(0, E_y(x,t), 0), \boldsymbol{H}=(0,0,H_z(x,t))$ を

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0 \text{ に代入して } \frac{\partial E_y(x,t)}{\partial y}=0. \tag{1}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{H}=0 \text{ に代入して } \frac{\partial H_z(x,t)}{\partial z}=0. \tag{2}$$

$$\boldsymbol{e}_x(\frac{\partial H_z}{\partial y}-\frac{\partial H_y}{\partial z})+\boldsymbol{e}_y(\frac{\partial H_x}{\partial z}-\frac{\partial H_z}{\partial x})+\boldsymbol{e}_z(\frac{\partial H_y}{\partial x}-\frac{\partial H_x}{\partial y})=\boldsymbol{e}_x\frac{\partial D_x}{\partial t}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial D_y}{\partial t}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial D_z}{\partial t}$$

$$\text{に代入して } -\frac{\partial H_z(x,t)}{\partial x}=\varepsilon_0\frac{\partial E_y(x,t)}{\partial t}. \tag{3}$$

$$\boldsymbol{e}_x(\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z})+\boldsymbol{e}_y(\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x})+\boldsymbol{e}_z(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y})=-\boldsymbol{e}_x\frac{\partial B_x}{\partial t}-\boldsymbol{e}_y\frac{\partial B_y}{\partial t}-\boldsymbol{e}_z\frac{\partial B_z}{\partial t}$$

$$\text{に代入して} \frac{\partial E_y(x,t)}{\partial x}=-\mu_0\frac{\partial H_z(x,t)}{\partial t}. \tag{4}$$

2. (4) 式を x で偏微分して、 (3) 式を用いると

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}=-\mu_0\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial H_z}{\partial t})=-\mu_0\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial H_z}{\partial x})$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}=(\varepsilon_0\mu_0)\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}. \tag{5}$$

得られた式は一次元（x 軸方向に進行または後退する）波動を決める方程式（波動方程式）である。(3) 式を x で偏微分して、 (4) 式を用いると

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} &= -\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial E_y}{\partial t})=-\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial E_y}{\partial x}) \\ \rightarrow \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} &= (\varepsilon_0\mu_0)\frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}. \end{aligned} \tag{6}$$

この式も一次元（x 軸方向に進行または後退する）波動を決める方程式（波動方程式）である

3. 波動方程式の形より、この波動の位相速度 v は $v=1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ となる。