

(電気双極子；dipoleint-elect-qa021130.tex)

2つの正負一対の電荷 ($\pm q$) が間隔 ℓ で離れている場合に、負電荷から正電荷の向きに変位ベクトル ℓ をとれば、電気双極子モーメント (ベクトル) は $p = q\ell$ と定義される。

1. 電気双極子モーメント (ベクトル) p_1 をもつ電気双極子 1 が原点にある場合、それによる位置 r における電位 ϕ_1 は

$$\phi_1(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (r = |\mathbf{r}|, \epsilon_0 : \text{真空の誘電率}) \quad (1)$$

と表される。このとき、電場 (ベクトル) が次のように表されることを示せ。

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}_1}{r^3} \right] \quad (2)$$

2. 電気双極子 1 のつくる電場の中に電気双極子モーメント (ベクトル) p_2 をもつ電気双極子 2 が置かれる場合の位置エネルギー (相互作用エネルギー) が次のように表されることを示せ。

$$U_{12} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{r})}{r^5} - \frac{(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2)}{r^3} \right] \quad (3)$$

3. 前問の結果を用いて、 p_1 と r が垂直な場合と p_1 と r が平行で同じ向きの場合にわけて、位置エネルギーが最小となる p_2 の向きを調べよ。

(解答例)

1. 電場と電位の関係より、まず電場の x 成分は

$$E_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r}}{r^3} \right). \quad (4)$$

ここで

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r}}{r^3} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (p_{1x}x + p_{1y}y + p_{1z}z) = p_{1x}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r^3} \right) = \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right) \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r^3} \right) = -\frac{3}{r^4} \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{3x}{r^5} \left(\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} [x^2 + y^2 + z^2]^{1/2} = \frac{x}{r} \right) \quad (6)$$

であることを用いて

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r})x}{r^5} - \frac{p_{1x}}{r^3} \right]. \quad (7)$$

他の成分も同様に計算できて、まとめてベクトルで表現すると

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}_1}{r^3} \right] \quad (8)$$

2. 電気双極子 1 のつくる電場の中に、電気双極子 2 (p_2) が置かれた場合、電場ベクトル E_1 が p_2 と角度 θ をなすすると、正電荷 q が電場の向きに $\ell_2 \cos \theta$ だけ移動する場合の電場の行う仕事を考えると、題意の位置エネルギーは

$$\begin{aligned} U_{12} &= -(qE_1)\ell_2 \cos \theta \\ &= -\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{E}_1, \quad (\mathbf{p}_2 = q\ell_2) \end{aligned} \quad (9)$$

となるので、結局

$$U_{12} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{r})}{r^5} - \frac{(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2)}{r^3} \right]. \quad (10)$$

3. 前問の結果に表されているように、相互作用エネルギーは2つの双極子モーメントベクトルの相互の方向に依存する(因子 $(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2)$) だけではなく、それぞれのベクトルの位置ベクトルとの相対的な向きにも依存する(因子 $(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{r})$)

- (a) $\mathbf{p}_1$ と $\mathbf{r}$ が垂直な場合、式(10)の第2項はゼロであるから、第1項にもが問題となる。これは $\mathbf{p}_1$ と $\mathbf{p}_2$ が反平行のときに最小値 ($U_{12} = -p_1 p_2 / 4\pi\epsilon_0 r^3$) となる。ここで $p_1 = |\mathbf{p}_1|, p_2 = |\mathbf{p}_2|$ である。
- (b) $\mathbf{r}$ が平行で同じ向きの場合、 $(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{r}) = r^2(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2)$ となるから、第1項と第2項は同じ形になり、絶対値は大きい。したがって、 $\mathbf{p}_1$ と $\mathbf{p}_2$ が平行のときに、位置エネルギーは最小 ($U_{12} = -p_1 p_2 / 2\pi\epsilon_0 r^3$) となる。

参考：同様の結果は、磁気双極子に対しても成立する。すなわち、小さな磁石間の力は中心間の距離だけではなく、相互の向きにも依存するという意味で、非中心力の典型例である。また、類似の相互作用として、原子核における結合力としての核力にはテンソル力成分が重要な役割を果たしていることがわかっている。