

ド・ブローイ波 (de Broglie wave)

1 光における波動一粒子の二重性

光は干渉実験や回折実験などにおいて波動性を示すことはよく知られている。しかし、光電効果やコンプトン散乱などを理解するためには光が “粒子性” ももつことを認めなければならない。このように、光は波動一粒子の二重性 (duality) を示す：ある状況（伝播）では波動のように振舞うが、別の状況（相互作用）では粒子のように振舞う。

波動性と粒子性の質的相違を明らかにすることは、これらがエネルギーや運動量を伝えるただ二つの形態であるから、重要である。古典的粒子は、位置 $x(y, z)$ 、運動量 p 、運動エネルギー K 、質量 m および荷電粒子の場合には電荷 Q という属性をもつ。一方、古典的波動は波長 λ 、振動数 ν 、（位相）速度 v_{phase} などの属性をもつ。すなわち、粒子は（空間的に）局在し、個数性があるが、波動は広がってゆき、相対的に空間の広い領域を占める。

2 物質粒子における波動一粒子の二重性

1924 年、ド・ブローイ (Luise de Broglie) は光が波動一粒子の二重性をもつならば、電子のような物質粒子も波動一粒子の二重性がありうることを、物質粒子にはある “波動” が伴う（ド・ブローイ波または物質波、de Broglie wave）ことを提案した。すなわち、ド・ブローイは「もし、物質粒子がそれらに伴う波の波長と同程度の幅をもつスリットを通過すると、光子が単一のスリットの実験で回折（refraction）するのと同様に、物質粒子も回折を引き起こす」と提案した。

波長 λ 、振動数 ν 、（位相）速度 c 、エネルギー ε の光子に対しては、アインシュタインの関係式 $\varepsilon = h\nu$ 、特殊相対論から得られる関係式 $\varepsilon = cp$ および光の位相速度、波長、振動数の関係 $c = \lambda\nu$ を用いれば、光子に対する次の関係式が導かれる。

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{(\varepsilon/p)}{(\varepsilon/h)} \\ &= \frac{h}{p}, \quad (\text{光の波長}) = \frac{(\text{プランク定数})}{(\text{光子の運動量})}\end{aligned}\quad (1)$$

これらの関係式は波動的な側面と粒子的な側面がプランク定数 h を架け橋として結ばれている。ド・ブローイは、自然の対称性から考えて、物質粒子に伴う “波動” の波長は光子に対して成立したのと同じ関係式を満たすだろうと推測した。すなわち、彼は物質粒子が次の式

$$\lambda = \frac{h}{mv} (\text{古典論の場合}) (= \frac{h}{\frac{mv}{\sqrt{1-(v/c)^2}}} (\text{相対論の場合})) \quad (2)$$

$$(\text{ド・ブローイ波長}) = \frac{(\text{プランク定数})}{(\text{粒子の運動量})} \quad (3)$$

によって与えられる波長をもつと仮定した。

ただし、光と質量をもつ物質粒子には、それらの波動性と粒子性のかかわり方にひとつの重要な差がある。すなわち、光子に対しては $\lambda\nu = c$ だから、エネルギーおよび運動量という粒子性から波長および振動数の両方を得るために、ただひとつの規則が必要である。一方、質量をもつ物質粒子はその波長 ($\lambda = h/p$) および振動数 ($\nu = \varepsilon/h$) に対して別々の規則を必要とする。

ド・ブローイの仮定の実験的検証は次のように行われた。

1. 1927 年、デビソンとガーマーによるニッケル単結晶への電子ビームの回折実験。
2. 1928 年、トムソンによる金属薄膜による電子ビームの干渉実験。
3. 1929 年、菊池正士による電子ビーム回折実験。

3 ド・ブローイ波の意味

電子のような物質粒子が波動的な性質を示すとき、“波動”とは何を意味するだろうか。

3.1 電磁波に対する確率的解釈

スリットが二箇所にある実験で得られる干渉パターンを考える。波動描像に従えば、スクリーンの上のある点における光の強度（単位時間、単位面積あたりのエネルギー） I は次の式で与えられる。

$$I = \varepsilon_0 c E^2. \quad (4)$$

ここで、 E は与えられた点での電場の強さ、 ε_0 は真空の誘電率、 c は光速である。一方、粒子描像では

$$I = h\nu N. \quad (5)$$

ここで、 $h\nu$ は光子一個あたりのエネルギーであり、 N はスクリーン上の決まったところに当たる光子束（＝単位時間、単位面積あたりの光子数）である。

一瞬の閃光を放って個々の光子がスクリーン上のどこに当たるか、あらかじめ予測する方法はない。しかし、多くの光子の照射が集積される最終的な干渉像には交互に明暗が繰り返えされている。どれか任意の 1 個の光子は、明るい部分に到達するのは非常に高い確率（probability）をもっており、暗い部分に到達する確率はゼロまたは非常に小さい。したがって、スクリーン上のある点の光子束 N は、その点の近くで 1 個の光子を見出す確率を表わす量である。上記二つの関係式によると、 $N \propto E^2$ であること（光子束は電場の 2 乗に比例すること）が分かる。ゆえに、電磁放射の量子論的解釈を用いれば、振動を起こしている量、すなわち、電場 E は、その 2 乗が与えられた場所で光子を見出す確率を与える関数である。

4 ド・ブローイ波の確率的解釈

上で議論された干渉縞は、光の波の代わりに、ド・ブローイ波によってもつくられる。この場合、光の波動-粒子の二重性にもとづく確率的解釈をそのまま、繰り返して、物質粒子の波動-粒子の二重性を説明できる。こうして、電子波を用いると、ド・ブローイ波の波長 $\lambda = h/mv$ で振動する量は、その 2 乗が与えられた場所で 1 個の電子を見出す確率を与える "波動関数" (wave function) である。波動性と粒子性を両立させるためには、「単一の粒子の場所を正確に指定することができる」という（素朴な）考えを放棄しなければならないことが後に分かった。"波動関数" は通常、 Ψ で代表される。光子に対しては Ψ で表わされるド・ブローイ波は電磁波であるが、電子や他の物質粒子に対しては、 Ψ は電磁氣的ではないド・ブローイ波である。この波はシュレディンガー方程式 (Schrödinger equation) によって決定されることが後に分かった。

5 ド・ブローイ波の現代的话题；原子気体におけるボーズ・アインシュタイン凝縮

分子統計力学によれば、熱平衡状態ではエネルギー等分配則が成立する。それによれば、質量 m , 速さ v の粒子（例えば原子）の平均の運動エネルギーは、絶対温度 T の場合

$$\langle \frac{1}{2}mv^2 \rangle = \frac{3}{2}k_B T, \quad (k_B : \text{ボルツマン定数}) \quad (6)$$

したがって平均の運動量 p は

$$p = \sqrt{3mk_B T} \quad (7)$$

となる。ここで、この原子のド・ブローイ波の波長 λ は

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (8)$$

$$= \frac{h}{\sqrt{3mk_B T}}. \quad (9)$$

この関係式より、質量が小さいほどまた、低温になるほどド・ブローイ波の波長が長くなる。

ここで、ド・ブローイ波の波長 λ が原子間隔 d に等しくなるための温度は

$$T = \frac{h^2}{3mk_B d^2} \quad (10)$$

となる。

ここで原子として、Rb(グラム原子量 85.48g) を選ぶと、原子 1 個の質量 m は

$$m = \frac{85.48\text{g}}{6 \times 10^{23}} = 1.43 \times 10^{-25}\text{kg}. \quad (11)$$

となる。ボルツマン定数、 $k_B = 1.38 \times 10^{-23} \text{joule/K}$, プランク定数 $h = 6.63 \times 10^{-34} \text{joule} \cdot \text{s}$ を代入, 原子間隔として $d = 1.5 \times 10^{-10} \text{m}$ を選ぶと、必要な温度は

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{(6.63 \times 10^{-34} \text{joule} \cdot \text{s})^2}{3 \times (1.43 \times 10^{-25} \text{kg}) \times (1.38 \times 10^{-23} \text{joule/K}) \times (1.5 \times 10^{-10} \text{m}^2)} \\
 &= \frac{6.63^2}{3 \times 1.43 \times 1.38 \times 1.5^2} \times 10^{-68+23+25+20} \times \text{joule}^2 \text{s}^2 \text{jouleK}^{-1} \text{kgm}^2 \\
 &= 3.3 \text{K} \\
 &\approx -270 \text{C}
 \end{aligned} \tag{12}$$

となる。