

古典物理学において、質量 m の粒子の速度 v 、運動量と(運動)エネルギー E には $E = p^2/2m$ の関係がある。一方、量子論では、粒子には、次のようなド・ブローイの関係で定義される波長 λ をもつ物質波(ド・ブローイ波)が伴う。

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (h: \text{プランク定数}) \quad (1)$$

1. アインシュタインの関係式を用い、対応する角振動数 ω を波数 k , プランク定数 h , 質量 m で表わす関係式を求めよ。
2. このド・ブローイ波の位相速度 v_{phase} と群速度 v_{group} を計算して、粒子の速度 v に対応するのはド・ブローイ波の位相速度 v_{phase} と群速度 v_{group} のどちらか述べよ。ただし、位相速度 v_{phase} と群速度 v_{group} は角振動数 ω と波数 k により、 $v_{\text{phase}} \equiv \omega/k$, $v_{\text{group}} \equiv d\omega/dk$ と定義される。

(解答)

1. アインシュタインの関係式 $E = \hbar\omega$ ($\hbar \equiv h/2\pi$) とド・ブローイの関係を波数 $k = 2\pi/\lambda$ で表わすと次の関係式を得る。

$$\omega = \frac{\hbar k^2}{2m}. \quad (2)$$

2. 前問の結果を波の位相速度の定義に用いると

$$\begin{aligned} v_{\text{phase}} &\equiv \frac{\omega}{k} \\ &= \frac{\hbar k}{2m} \frac{p}{\hbar k} \\ &= \frac{v}{2}. \end{aligned} \quad (3)$$

他方、波の群速度の定義に用いると

$$\begin{aligned} v_{\text{group}} &\equiv \frac{d\omega}{dk} \\ &= \frac{\hbar 2k}{2m} = \frac{p}{m} \\ &= v. \end{aligned} \quad (4)$$

ゆえに、粒子の速度 v に対応するのはド・ブローイ波の位相速度 v_{phase} ではなく群速度 v_{group} である。