(運動している試験電荷に働くクーロン力 b3）

ある慣性系 $Oxyzt$(S 系）に対して、$x(x')$ 軸方向に一定の速度 V で運動する座標系 $O'x'y'z't'$（S' 系）を考える。ここで、真空中の光速度を c とする。ある粒子の速度ベクトルを、S 系と S' 系において、それぞれ $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u'}$、そして同様に, 力ベクトルを $\boldsymbol{F}, \boldsymbol{F'}$ とすると、座標、時間のローレンツ変換, 速度 $\boldsymbol{u}$ の変換式（速度合成則）と力の成分の変換式は次のように与えられる。

$$x' = \gamma(x - Vt), y' = y, z' = z, t' = \gamma(t - Vx/c^2), \ (\beta \equiv V/c,\ \gamma \equiv 1/\sqrt{1-(V/c)^2}), \ (1)$$

$$u_{x'} = \frac{u_x - V}{1 - Vu_x/c^2},\ u_{y'} = \frac{u_y}{\gamma[1 - Vu_x/c^2]},\ u_{z'} = \frac{u_z}{\gamma[1 - Vu_x/c^2]}, \ (2)$$

$$F_{x'} = \frac{F_x - (V/c^2)(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u})}{1 - Vu_x/c^2}, F_{y'} = \frac{F_y}{\gamma(1 - Vu_x/c^2)}, F_{z'} = \frac{F_z}{\gamma(1 - Vu_x/c^2)}. \ (3)$$

今、S 系に対して源電荷 q_1 は $x(x')$ 軸方向に一定の速度 $(V, 0, 0)$ で、試験電荷 q_2 は u_y で運動しているとする。そして時刻 $t = 0$ で q_1 は $(0, 0, 0)$ に、 q_2 は $(0, y, 0)$ の位置にあり、y 軸方向に速度 $\boldsymbol{u} = (0, u_y, 0)$ で運動しているとする。一定の速度 $(V, 0, 0)$ で運動する座標系を S' 系とする。問いに答えよ。

1. S 系の時刻 $t = 0$ に対応した,S' 系における q_1, q_2 の座標と時刻を記せ。
2. S' 系において、q_1 が q_2 に及ぼすクーロン力の成分を記せ。
3. S' 系における q_2 の速度成分を求めよ。
4. q_1 が q_2 に及ぼす力の成分を S 系に変換せよ。
5. q_1 が q_2 に及ぼす力の y 成分（修正された電気力）を $F_{\rm elec}$、x 成分（磁気力）を $F_{\rm mag}$ と再定義する。ここで $F_{\rm mag}$ を $F_{\rm elec}$,V, u_y, c で表して、結果の意味を説明せよ。

[解答例]

1. 題意より、S 系における時空座標は $q_1; (0, 0, 0, 0), q_2; (0, y, 0, 0)$ だから
   ローレンツ変換より S' 系における時空座標は $q_1; (0, 0, 0, 0), q_2; (0, y', 0, 0)$ となる。 ここで $y' = y$ である。
2. クーロン力は源電荷が静止している系（今は S' 系）で考えるのが基本だから、S' 系では q_1, q_2 間の距離として、y ではなく y' を用いるべきで

ある。したがって、

$$F_{x'} = 0,\ F_{y'} = \frac{kq_1q_2}{(y')^2},\ F_{z'} = 0, (k \equiv \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}). \tag{4}$$

3. S' 系における q_2 の速度成分は速度合成則より

$$\begin{aligned} u_{x'} &= \frac{0-V}{[1-V\times 0/c^2]}, \\ &= -V, & (5) \\ u_{y'} &= \frac{u_y}{\gamma[1-V\times 0/c^2]}, \\ &= \frac{u_y}{\gamma}, & (6) \\ u_{z'} &= \frac{0}{\gamma[1-Vu_x/c^2]}, \\ &= 0. & (7) \end{aligned}$$

4. 速度の成分の逆変換式（逆変換式はベクトル成分のダッシュを交換し、$V \to -V$ と符号を変更して得られる。）において、$u_{x'}, u_{y'}, u_{z'}$ に対する前問の結果を代入して、S 系における力の成分は

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{F_{x'} + (V/c^2)(F_{x'}u_{x'} + F_{y'}u_{y'})}{1+Vu_{x'}/c^2} \\ &= \frac{0 + (V/c^2)(0\times(-V) + \frac{kq_1q_2}{(y')^2}\frac{u_y}{\gamma})}{1-(V/c)^2}, \\ &= \frac{\frac{V}{c^2}}{1-(V/c)^2}\frac{kq_1q_2}{(y')^2}\frac{u_y}{\gamma}, \\ &= \frac{u_yV}{c^2}\frac{\gamma kq_1q_2}{y^2}, & (8) \\ F_y &= \frac{F_{y'}}{\gamma[1+Vu_{x'}/c^2]}, \\ &= \frac{kq_1q_2}{(y')^2}/\gamma[1-(V/c)^2], \\ &= \frac{\gamma kq_1q_2}{y^2}, & (9) \\ F_z &= \frac{F_{z'}}{\gamma[1+Vu_{x'}/c^2]}, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{0}{\gamma[1-(V/c)^2]}, \\
&= 0. \qquad (10)
\end{aligned}
$$

5. 題意より

$$
\begin{aligned}
F_{\mathrm{elec}} &\equiv \frac{\gamma k q_1 q_2}{y^2}, \\
F_{\mathrm{mag}} &\equiv \frac{u_y V}{c^2}\frac{\gamma k q_1 q_2}{y^2}, \\
&= \frac{u_y V}{c^2} F_{\mathrm{elec}}. \qquad (11)
\end{aligned}
$$

お互いに垂直な方向に運動している電荷 q_1 から電荷 q_2 に働く力は，次の二つから成り立っている： q_1 から q_2（今、y 軸向き）に向かう修正された電気力（大きさ $\gamma k q_1 q_2/y^2$） と q_2 の運動方向（今、y 軸向き）とは垂直な向きを持つ磁気力（今、x 成分）で、その大きさは二つの電荷の速度に比例する。