

(運動している試験電荷に働くクーロン力 b2)

ある慣性系 $Oxyz$ (S系) に対して、 $x(x')$ 軸方向に一定の速度 V で運動する座標系 $O'x'y'z't'$ (S' 系) を考える。ここで、真空中の光速を c とし、 $\beta \equiv V/c$, $\gamma \equiv 1/\sqrt{1 - (V/c)^2}$ という記号を使用する。ある粒子の速度ベクトルを、S系と S' 系において、それぞれ $\mathbf{u}, \mathbf{u}'$ 、そして同様に、力ベクトルを $\mathbf{F}, \mathbf{F}'$ とすると、座標、時間のローレンツ変換、速度 $\mathbf{u}$ の変換式 (速度合成則) と力の成分の変換式は次のように与えられる。

$$x' = \gamma(x - Vt), y' = y, z' = z, t' = \gamma(t - Vx/c^2), \quad (1)$$

$$u_{x'} = \frac{u_x - V}{1 - Vu_x/c^2}, u_{y'} = \frac{u_y}{\gamma[1 - Vu_x/c^2]}, u_{z'} = \frac{u_z}{\gamma[1 - Vu_x/c^2]}, \quad (2)$$

$$F_{x'} = \frac{F_x - (V/c^2)(\mathbf{F} \cdot \mathbf{u})}{1 - Vu_x/c^2}, F_{y'} = \frac{F_y}{\gamma(1 - Vu_x/c^2)}, F_{z'} = \frac{F_z}{\gamma(1 - Vu_x/c^2)}. \quad (3)$$

今、S系に対して源電荷 q_1 は $x(x')$ 軸方向に一定の速度 $(V, 0, 0)$ で、試験電荷 q_2 は u_x で運動しているとする。そして時刻 $t = 0$ で q_1 は $(0, 0, 0)$ に、 q_2 は $(0, y, 0)$ の位置にいたとする。一定の速度 $(V, 0, 0)$ で運動する座標系を S' 系とする。問いに答えよ。

1. S系の時刻 $t = 0$ に対応した、 S' 系における q_1, q_2 の座標と時刻を記せ。
2. S' 系において、 q_1 が q_2 に及ぼすクーロン力の成分を記せ。
3. 直前問の結果を S系に変換せよ。
4. 運動している源電荷 q_1 が静止している試験電荷 q_2 に働く修正された電気力の y 成分を $F_{\text{elec}} = \gamma k q_1 q_2 / y^2$ と再定義する。前問の結果の y 成分 F_y と F_{elec} との差 F_{mag} を $F_{\text{elec}}, u_x, V, c$ で表し、結果の意味を説明せよ。

[解答例]

1. 題意より、S系における時空座標は $q_1; (0, 0, 0, 0), q_2; (0, y, 0, 0)$ だから
ローレンツ変換より S' 系における時空座標は $q_1; (0, 0, 0, 0), q_2; (0, y', 0, 0)$ となる。ここで $y' = y$ である。
2. クーロン力は源電荷が静止している系 (今は S' 系) で考えるのが基本だから、 S' 系では q_1, q_2 間の距離として、 y ではなく y' を用いるべきで

ある。したがって、

$$F_{x'} = 0, F_{y'} = \frac{kq_1q_2}{(y')^2}, F_{z'} = 0, (k \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0}). \quad (4)$$

3. 速度の成分の逆変換式（逆変換式はベクトル成分のダッシュを交換し、 $V \rightarrow -V$ と符号を変更して得られる。）において、 $u_{x'} = (u_x - V)/[1 - Vu_x/c^2]$, $u_{y'} = u_{z'} = 0$ を代入して、S系における力の成分は

$$F_x = \frac{F_{x'} + (V/c^2)F_{x'}u_{x'}}{1 + Vu_{x'}/c^2} = F_{x'} = 0, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} F_y &= \frac{F_{y'}}{\gamma[1 + Vu_{x'}/c^2]} = F_{y'}/\gamma[1 + (\frac{V}{c^2})\frac{u_x - V}{1 - Vu_x/c^2}] \\ &= \frac{\gamma kq_1q_2}{y^2} \times (1 - \frac{Vu_x}{c^2}), \end{aligned} \quad (6)$$

$$F_z = 0. \quad (7)$$

4. 題意より

$$\begin{aligned} F_{\text{elec}} &\equiv \frac{\gamma kq_1q_2}{y^2}, \\ F_{\text{mag}} &\equiv F_y - F_{\text{elec}}, \\ &= -\frac{Vu_x}{c^2}\gamma kq_1q_2/y^2, \\ &= -\frac{u_x V}{c^2}F_{\text{elec}}. \end{aligned} \quad (8)$$

同じ方向（今、x軸方向）に平行して、異なる速度で運動する電荷 q_1 から電荷 q_2 に働く力は次の二つの部分から成る：2電荷を結ぶ向き（今、y軸方向）の修正された電気力 F_{elec} と運動方向（今、x軸方向）と垂直な向きの磁気力 F_{mag} 。磁気力の大きさは二つの電荷の速さに比例する。